Correction Ex 1 type bac

Partie A

1. Dans la limite de précision du graphique, l'équation $f(x) = 6$ admet comme solution $\alpha \approx 12$.

2. a) Cherchons la pente de la droite T passant par A et B : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{14,2-7}{2-0} = 3,6$.

   b) On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,25]$. Pour tout $x \in [0\,;\,5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (ax+b)$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$.
   En écrivant $u'(x) = a$ et $v'(x) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2x}$,
   $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (ax+b) \times -0,2\mathrm{e}^{-0,2x} = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(a + (ax+b) \times -0,2)$
   $= \mathrm{e}^{-0,2x}\,(a - 0,2ax - 0,2b) = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(-0,2ax + a - 0,2b)$

   c) Nous savons que $A \in \mathcal{C}_f$ donc $f(0) = 7$. De plus D'après la question 2.a), $f'(0) = 3,6$.
   La première égalité se traduit par : $(a \times 0 + b)\mathrm{e}^{-0.2\times 0} = 7 \iff b = 7$
   La seconde donne quant à elle : $\mathrm{e}^{-0,2\times 0}\,(-0,2a \times 0 + a - 0,2b) = 3,6 \iff a - 0,2b = 3,6$
   Donc : $\begin{cases} a - 0,2\,b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$
   On remplace b par 7 dans la première équation, puis on trouve : $\begin{cases} a &= 3,6 + 0,2 \times 7 = 5 \\ b &= 7 \end{cases}$.
   Donc la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ par $f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

Partie B

1. Utilisons les résultats de la première partie. Pour tout $x \in [0\,;\,25]$,
   $f'(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(-0,2ax + a - 0,2b) = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(-0,2 \times 5 \times x + 5 - 0,2 \times 7) = (-x + 3,6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   Pour tout $x \in [0\,;\,25]$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x + 3,6$.
   $-x + 3,6 \geqslant 0 \iff x \leqslant 3,6$.
   Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ est :

x	0		$3,6$		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	$\nearrow$	$25\mathrm{e}^{-0,72}$	$\searrow$	$132\mathrm{e}^{-5}$

   $f(0) = 7$
   $f(3,6) = (5 \times 3,6 + 7)\mathrm{e}^{-0,2\times 3,6} = 25\mathrm{e}^{-0,72} \approx 12,17$
   $f(25) = (5 \times 25 + 7)\mathrm{e}^{-0,2\times 25} = 132\mathrm{e}^{-5} \approx 0,89$

2. Sur l'intervalle $[0\,;\,3,6]$, $f(x) \geqslant 7$ donc l'équation $f(x) = 6$ n'y admet aucune solution.
   Sur l'intervalle $[3,6\,;\,25]$, la fonction f est continue et strictement décroissante.
   De plus $6 \in [132\mathrm{e}^{-5}\,;\,25\mathrm{e}^{-0,72}]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[3,6\,;\,25]$. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx 12,1$.
   Pour conclure, l'équation $f(x) = 6$ admet donc une solution unique $\alpha \approx 12,1$ sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

3. Le logiciel de calcul donne une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.
   Donc $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(-25x - 160)\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} = -785\mathrm{e}^{-5} + 160 \approx 154,711$

Partie C

1.

2. D'après les questions de la partie précédente, l'aire de la partie hachurée représentant la piscine est égale en unités d'aires à : $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$ soit $-785\mathrm{e}^{-5}+160$. Or ici une unité d'aire est égale à un mètre carré, donc $A = -785\mathrm{e}^{-5}+160\ m^2 \approx 154,711\ m^2$.

3. Cherchons la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,25]$:
$\dfrac{1}{25-0}\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{-785\mathrm{e}^{-5}+160}{25} \approx 6,2.$
L'aire de la partie hachurée est donc égale à l'aire d'un rectangle ayant pour longueur 25, et pour hauteur 6,2. Donc si on remplace la piscine par un bassin rectangulaire ayant la même aire, ses dimensions seraient : $25\,m \times 6,2\,m$.