Exercice 112 p140

$f(x) = e^{-x}$, $g(x) = -x+1$, $h(x) = f(x) - g(x)$ fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1. On observe que les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1;0)$ appartiennent à la droite (d). Cette droite a pour ordonnée à l'origine la valeur $p = 1$ et pour coefficient directeur $m = \dfrac{1-0}{0-1} = -1$. Ainsi la droite (d) a pour équation :

   $(d) : y = -x + 1$.

2. a)
   - $f(x) = e^{-x}$, f est de la forme e^u. $(e^u)' = u'e^u$. On pose $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$. Ainsi : $f'(x) = -1 \times e^{-x} = -e^{-x}$.
   - $g(x) = -x+1$, ainsi $g'(x) = -1$.
   - $h(x) = f(x) - g(x)$, ainsi $h'(x) = f'(x) - g'(x) = -e^{-x} - (-1) = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$.

   b) Étudions le signe de h'

$$\begin{aligned} h'(x) &> 0 \\ 1 - e^{-x} &> 0 \\ 1 &> e^{-x} \\ e^{-x} &< 1 \\ ln(e^{-x}) &< ln(1) \\ -x &< 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$h(x) = f(x) - g(x) = e^{-x} - (-x+1) = e^{-x} + x - 1$. Ainsi, $h(0) = e^{-0} + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

3. D'après la question 2.b, on en déduit que $h(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

   Comme :

$$\begin{aligned} h(x) &\geqslant 0 \\ f(x) - g(x) &\geqslant 0 \\ f(x) &\geqslant g(x) \end{aligned}$$

   On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au-dessus de la droite (d) sur $\mathbb{R}$.

4. h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives. h est une fonction positive. On peut donc calculer l'aire sous sa courbe représentative.

   On rappelle que : $h(x) = f(x) - g(x) = e^{-x} - (-x+1) = e^{-x} + x - 1$.

   A noter que : $\displaystyle\int e^{ax+b} = \frac{1}{a}e^{ax+b}$. Ainsi, $\displaystyle\int e^{-1\times x+0} = \int e^{-x} = \frac{1}{-1}e^{-1\times x+0} = -1 \times e^{-x} = -e^{-x}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 h(x)\,dx &= \int_0^1 e^{-x}+x-1\,dx \\
&= \left[-e^{-x}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1 \\
&= \left(-e^{-1}+\frac{1^2}{2}-1\right)-\left(-e^{-0}+\frac{0^2}{2}-0\right) \\
&= \left(-e^{-1}+\frac{1}{2}-1\right)-(-1+0-0) \\
&= -e^{-1}-\frac{1}{2}+1 \\
&= -e^{-1}+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

5. Calculer l'aire du domaine $\mathscr{D}$ sur l'intervalle $[0;a]$ revient à calculer l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite (d) sur l'intervalle $[0;1]$ puis l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[1;a]$.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 h(x)\,dx + \int_1^a f(x)\,dx \\
&= -e^{-1}+\frac{1}{2}+\int_1^a e^{-x}\,dx \\
&= -e^{-1}+\frac{1}{2}+\left[-e^{-x}\right]_1^a \\
&= -e^{-1}+\frac{1}{2}+\left(-e^{-a}-(-e^{-1})\right) \\
&= -e^{-1}+\frac{1}{2}-e^{-a}+e^{-1} \\
&= \cancel{-e^{-1}}+\frac{1}{2}-e^{-a}+\cancel{e^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}-e^{-a}
\end{aligned}
$$

Ainsi l'aire du domaine $\mathscr{D}$ mesure $\frac{1}{2}-e^{-a}$ unités d'aire.

Exercice 118 p141
Partie A

1. Résoudre $2-t\leqslant\frac{1}{t}$ est équivalent à résoudre $2-t-\frac{1}{t}\leqslant 0$.

   On définit la fonction $f(t)=2-t-\frac{1}{t}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

   $2-t\leqslant\frac{1}{t}$ pour tout $t\in[1;+\infty[$ si et seulement si $f(t)\leqslant 0$ pour tout $t\in[1;+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f(t) &\leqslant 0 \\
2 - t - \frac{1}{t} &\leqslant 0 \\
2 \times \frac{t}{t} - t \times \frac{t}{t} - \frac{1}{t} &\leqslant 0 \\
\frac{2t}{t} - \frac{t^2}{t} - \frac{1}{t} &\leqslant 0 \\
\frac{2t - t^2 - 1}{t} &\leqslant 0 \\
\frac{-t^2 + 2t - 1}{t} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Étudions le signe de la fonction $t \mapsto -t^2 + 2t - 1$.

C'est une fonction polynomiale du second degré de la forme $at^2 + bt + c$ avec : $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 4 - 4 = 0$.

La fonction $t \mapsto -t^2 + 2t - 1$ admet une racine réelle x_0.

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2 \times (-1)} = 1$.

On en déduit donc le tableau de signe suivant :

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-t^2+2t+1$		$-$		$-$	0	$-$	
t		$-$	0	$+$		$+$	
$f(t)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$-$	

On remarque ainsi que $f(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [1; +\infty[$.

Par conséquent : $2 - t - \dfrac{1}{t} \leqslant 0$ pour tout $t \in [1; +\infty[$;

$\iff \; 2 - t \leqslant \dfrac{1}{t}$ pour tout $t \in [1; +\infty[$.

2. $\displaystyle\int_1^x (2-t)\,dt = \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 \times 1 - \frac{1^2}{2}\right) = \left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

3. D'après la question 1.

   On sait que $2 - t \leqslant \dfrac{1}{t}$, par conséquent :

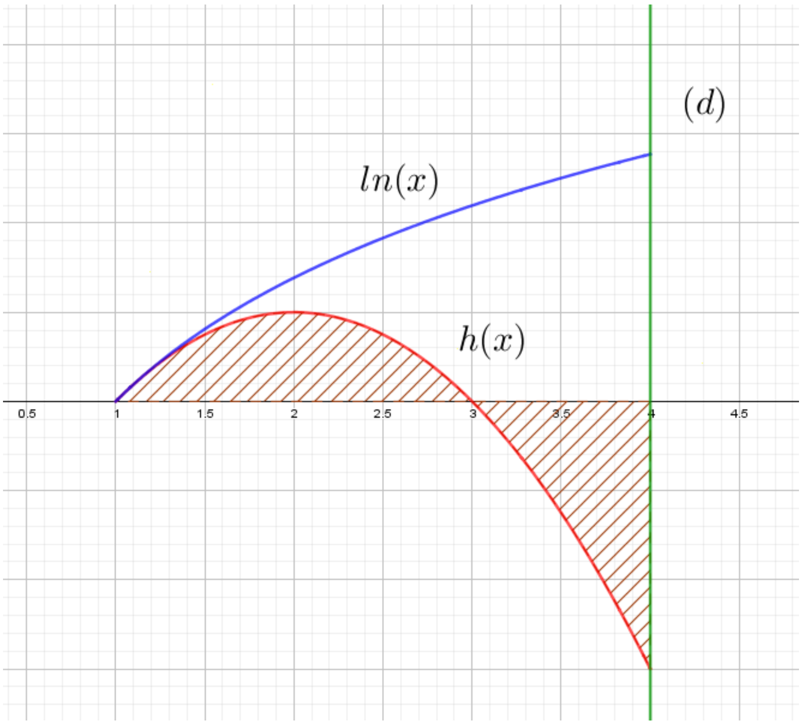
$$
\begin{aligned}
\int_1^x (2-t)\,dt &\leqslant \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \\
-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} &\leqslant [ln(t)]_1^x \\
-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} &\leqslant ln(x)-ln(1) \\
-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2} &\leqslant ln(x)
\end{aligned}
$$

Partie B

1.

$$
\begin{aligned}
\int_1^4 h(x)\,dx &= \int_1^4 -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3}+2\times\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right]_1^4 \\
&= \left[-\frac{1}{6}\times x^3+x^2-\frac{3}{2}x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{1}{6}\times 4^3+4^2-\frac{3}{2}\times 4\right)-\left(-\frac{1}{6}\times 1^3+1^2-\frac{3}{2}\times 1\right) \\
&= \left(-\frac{1}{6}\times 64+16-6\right)-\left(-\frac{1}{6}+1-\frac{3}{2}\right) \\
&= -\frac{64}{6}+10-\left(-\frac{1}{6}+\frac{6}{6}-\frac{9}{6}\right) \\
&= -\frac{64}{6}+\frac{60}{6}-\left(-\frac{4}{6}\right) \\
&= -\frac{4}{6}+\frac{4}{6} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

2.



3. a) f est une primitive de $ln(x)$ si et seulement si $f'(x) = ln(x)$.

   $f(x) = xln(x) - x$, on pose $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = ln(x)$, $v'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1 \\ &= 1 \times ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= ln(x) + 1 - 1 \\ &= ln(x) \end{aligned}$$

   Ainsi f est bien une primitive de la fonction $ln(x)$.

   b) $\mathscr{C}_{ln} \geqslant \mathscr{C}_h$. Par conséquent l'aire D est égale à :

$$\begin{aligned} \int_1^4 ln(x)\,dx - \int_1^4 h(x)\,dx & \\ &= [xln(x) - x]_1^4 - 0 \\ &= (4ln(4) - 4) - (1ln(1) - 1) \\ &= 4ln(4) - 4 + 1 \\ &= 4ln(4) - 3 \\ &\approx 2,55 \end{aligned}$$

   Le domaine D mesure $4ln(4) - 3$ unités d'aire. Soit environ 2,55 unités d'aire.