Correction Ex 2 type bac

Partie A

1. a) La droite D passe par le point de coordonnées $(1\,;10)$; 1 représente 100 litres et 10 représentent 1 000 euros. Donc la vente de 100 litres de sorbet rapporte 1 000 euros.

   b) La droite D passe par l'origine donc représente une fonction linéaire r avec $r(x) = ax$.
   Cette droite passe par le point de coordonnées $(1\,;10)$ donc $r(1) = 10 \iff a = 10$.
   Donc $r(x) = 10x$.

   c) Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que la droite D représentant la recette soit au dessus de la courbe $\mathcal{C}$ représentant le coût; la droite et la courbe se coupent au point d'abscisse 1. Il faut donc que $x > 1$ pour réaliser un bénéfice, donc que l'artisan produise au moins 100 litres de sorbet.

2. On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x = 90\ln 3 - 40$.

   a) $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 \left(10x^2 - 20x\ln x\right) dx = \int_1^3 10x^2dx - \int_1^3 20x\ln x\d{x}$

   La fonction $x \longmapsto 10x^2$ a pour primitive $x \longmapsto 10\dfrac{x^3}{3}$ donc

   $\int_1^3 10x^2dx = \left[10\dfrac{x^3}{3}\right]_1^3 = \left(10\times\dfrac{27}{3}\right) - \left(10\times\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{260}{3}$

   $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \frac{260}{3} - (90\ln 3 - 40) = \frac{260}{3} - 90\ln 3 + 40 = \frac{380}{3} - 90\ln 3$

   b) La valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 3 est $\dfrac{1}{3-1}\displaystyle\int_1^3 f(x)dx \approx 13,90$.

   Donc pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne du coût total de production est égale à 1 390 euros.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $1\ ;\ 3$, on a : $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B; $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x\ln x$ donc
   $B'(x) = -20x + 10 + 20\left(1\times\ln x + x\times\dfrac{1}{x}\right) = -20x + 10 + 20\ln x + 20 = -20x + 20\ln x + 30.$

2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $1\ ;\ 3$:

x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	
			$B'(3)$

   a) $B'(1) = 10 > 0$ et $B'(3) \approx -8 < 0$ donc $B'(1) > 0 > B'(3)$.
   On complète le tableau de variations de B' sur $1\,;3$:

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1)$	0	$B'(3)$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $1\,;3$.

$$\left.\begin{array}{l} B'(2) \approx 3,9 > 0 \\ B'(3) \approx -8 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in 2\,;3$$

$$\left.\begin{array}{l} B'(2,3) \approx 0,7 > 0 \\ B'(2,4) \approx -0,5 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in 2,3\,;2,4$$

$$\left.\begin{array}{l} B'(2,35) \approx 0,09 > 0 \\ B'(2,36) \approx -0,03 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \in 2,35\,;2,36$$

Donc $\alpha \approx 2,35$.

b) D'après la question précédente:
- $B'(x) > 0$ sur $1\,;\alpha$;
- $B'(\alpha) = 0$;
- $B'(x) < 0$ sur $\alpha\,;3$.

S'il n'y a aucune production, il n'y a pas de bénéfice donc $B(1) = 0$; $B(3) \approx 5,92$.

D'où le tableau de variations de la fonction B sur $1\,;3$:

x	1		α		3
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0		$B(\alpha)$		$5,92$

3. Le bénéfice maximum est obtenu pour $x = \alpha$ avec $\alpha \in 2,35\,;2,36$.

   À la calculatrice on obtient $B(2,35) \approx 8{,}432\,5$ et $B(2,36) \approx 8{,}432\,8$, correspondant respectivement à des bénéfices de 843,25 € et de 843,28 €.

   Il ne semble donc pas envisageable d'atteindre un bénéfice d'au moins 850 €.