

Partie A

1. a) La droite D passe par le point de coordonnées $(1 ; 10)$; 1 représente 100 litres et 10 représentent 1 000 euros. Donc la vente de 100 litres de sorbet rapporte 1 000 euros.
- b) La droite D passe par l'origine donc représente une fonction linéaire r avec $r(x) = ax$. Cette droite passe par le point de coordonnées $(1 ; 10)$ donc $r(1) = 10 \iff a = 10$.
Donc $r(x) = 10x$.
- c) Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que la droite D représentant la recette soit au dessus de la courbe \mathcal{C} représentant le coût; la droite et la courbe se coupent au point d'abscisse 1. Il faut donc que $x > 1$ pour réaliser un bénéfice, donc que l'artisan produise au moins 100 litres de sorbet.

2. On admet que $\int_1^3 20x \ln x \, dx = 90 \ln 3 - 40$.

a)
$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (10x^2 - 20x \ln x) \, dx = \int_1^3 10x^2 dx - \int_1^3 20x \ln x \, dx$$

La fonction $x \mapsto 10x^2$ a pour primitive $x \mapsto 10 \frac{x^3}{3}$ donc

$$\int_1^3 10x^2 dx = \left[10 \frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \left(10 \times \frac{27}{3} \right) - \left(10 \times \frac{1}{3} \right) = \frac{260}{3}$$

$$\int_1^3 f(x) dx = \frac{260}{3} - (90 \ln 3 - 40) = \frac{260}{3} - 90 \ln 3 + 40 = \frac{380}{3} - 90 \ln 3$$

b) La valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 3 est $\frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx \approx 13,90$.

Donc pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne du coût total de production est égale à 1 390 euros.

Partie B

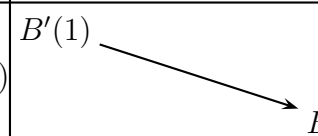
On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $1 ; 3$, on a : $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B ; $B(x) = -10x^2 + 10x + 20x \ln x$ donc

$$B'(x) = -20x + 10 + 20 \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} \right) = -20x + 10 + 20 \ln x + 20 = -20x + 20 \ln x + 30.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $1 ; 3$:

x	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$	$B'(3)$



a) $B'(1) = 10 > 0$ et $B'(3) \approx -8 < 0$ donc $B'(1) > 0 > B'(3)$.

On complète le tableau de variations de B' sur $1 ; 3$:

x	1	α	3
$B'(x)$	$B'(1)$	0	$B'(3)$

D'après ce tableau de variations, on peut dire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $1 ; 3$.

$$\left. \begin{array}{l} B'(2) \approx 3,9 > 0 \\ B'(3) \approx -8 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in 2 ; 3$$

$$\left. \begin{array}{l} B'(2,3) \approx 0,7 > 0 \\ B'(2,4) \approx -0,5 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in 2,3 ; 2,4$$

$$\left. \begin{array}{l} B'(2,35) \approx 0,09 > 0 \\ B'(2,36) \approx -0,03 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \in 2,35 ; 2,36$$

Donc $\alpha \approx 2,35$.

- b) D'après la question précédente:
- $B'(x) > 0$ sur $1 ; \alpha$;
 - $B'(\alpha) = 0$;
 - $B'(x) < 0$ sur $\alpha ; 3$.

S'il n'y a aucune production, il n'y a pas de bénéfice donc $B(1) = 0$; $B(3) \approx 5,92$.

D'où le tableau de variations de la fonction B sur $1 ; 3$:

x	1	α	3
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	0	$B(\alpha)$	5,92

3. Le bénéfice maximum est obtenu pour $x = \alpha$ avec $\alpha \in 2,35 ; 2,36$.

À la calculatrice on obtient $B(2,35) \approx 8,4325$ et $B(2,36) \approx 8,4328$, correspondant respectivement à des bénéfices de 843,25 € et de 843,28 €.

Il ne semble donc pas envisageable d'atteindre un bénéfice d'au moins 850 €.