Correction Ex 3 type bac

Partie A

Dans cette partie, les réponses seront données sans justification, avec la précision permise par le graphique situé en annexe . Celui-ci présente dans un repère d'origine O la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$.

1. l'intervalle $[0\ ;\ 7]$. L'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions dans $[0\ ;\ 7]$: l'une se trouve dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$; l'autre dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

2. Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ est d'environ $14,8$ et il semble atteint pour $x = 1$.

3. Soit I la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

   La fonction f est positive sur $[0\ ;\ 7]$ donc l'intégrale I est égale à l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$ (domaine hachuré en gris sur le graphique.

   Ce domaine contient le polygone hachuré en rouge dont l'aire est de 17 donc $I > 17$.

   Ce domaine est contenu dans le polygone dessiné en noir dont l'aire est de 26 donc $I < 26$.

   Le seul intervalle qui convienne est $[18\ ;\ 26]$.

Partie B

La courbe donnée en annexe est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ d'expression: $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}$.

1. $f'(x) = 2 \times \mathrm{e}^{-x+3} + 2x \times (-1)\mathrm{e}^{-x+3} = (2 - 2x)\mathrm{e}^{-x+3} = (-2x + 2)\mathrm{e}^{-x+3}$

2. a) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x+3} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 2$ qui s'annule et change de signe pour $x = 1$.
   $f(0) = 0$; $f(1) = 2\mathrm{e}^2 \approx 14,78$ et $f(7) = 14\mathrm{e}^{-4} \approx 0,26$
   On établit le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ 7]$:

x	0		1		7
$-2x+2$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^2$	$\searrow$	$14\mathrm{e}^{-4}$

   b) Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ est $f(1) = 2\mathrm{e}^2 \approx 14,78$.

3. a) On complète le tableau de variation de la fonction f:

x	0		α		1		β		7
$f(x)$	0	$\nearrow$	10	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^2 \approx 14,78$	$\searrow$	10	$\searrow$	$14\mathrm{e}^{-4} \approx 0,26$

D'après le tableau de variation de f, on peut déduire que l'équation $f(x) = 10$ admet deux solutions dans $[0\ ;\ 7]$.

b) On admet que $\alpha \approx 0,36$ à 10^{-2} près. On vérifie que $f(0,36) > 10$.

$\left.\begin{array}{l} f(2) \approx 10,9 > 10 \\ f(3) = 6 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [2\ ;\ 3]$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} f(2,1) \approx 10,3 > 10 \\ f(2,2) \approx 9,8 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [2,1\ ;\ 2,2]$

$\left.\begin{array}{l} f(2,16) \approx 10,01 > 10 \\ f(2,17) \approx 9,95 < 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow \beta \in [2,16\ ;\ 2,17]$

Donc $2,16$ est une valeur approchée au centième de β.

4. On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par: $F(x) = (-2x - 2)\mathrm{e}^{-x+3}$.

a) $F(x) = (-2) \times \mathrm{e}^{-x+3} + (-2x - 2) \times (-1)\mathrm{e}^{-x+3} = (-2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x+3} = 2x\mathrm{e}^{-x+3} = f(x)$
donc F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$.

b) La fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ donc la valeur de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ est $\int_1^3 f(x)dx$.
$\int_1^3 f(x)dx = \left[(-2x - 2)\mathrm{e}^{-x+3}\right]_1^3 = ((-2\times 3-2)\mathrm{e}^{-3+3}) - ((-2\times 1-2)\mathrm{e}^{-1+3}) = (-6-2)e^0 - (-4)e^2 = -8 \times 1 + 4e^2 == 4\mathrm{e}^2 - 8$ unités d'aire.

5. La fonction f étudiée modélise le bénéfice d'une entreprise, en milliers d'euros, réalisé pour la vente de x centaines d'objets (x compris entre 0 et 7).

a) La valeur moyenne du bénéfice lorsque l'entreprise vend entre 100 et 300 objets, donc entre 1 et 3 centaines d'objets, est:
$\dfrac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)dx = \dfrac{4\mathrm{e}^2 - 8}{2} = 2\mathrm{e}^2 - 4$ milliers d'euros, soit environ 10 778 euros.

b) L'entreprise souhaite que son bénéfice soit supérieur à 10 000 euros, ce qui revient à déterminer x pour que $f(x) > 10$.
D'après les questions précédentes, le nombre d'objets que l'entreprise devra vendre pour atteindre son objectif doit aller de α à β centaines, donc de $\alpha \times 100$ à $\beta \times 100$, et donc de 36 à 216 objets.

ANNEXE