Correction des exercices 67, 68p132, ex 114p140

Exercice 67p132

a) $I = \int_{-1}^{2} (x^2 - 4x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \times \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4}{2} \times x^2\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \times 2^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2 \times (-1)^2\right) = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{1}{3} - 2\right) = -\frac{16}{3} - \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{16}{3} + \frac{7}{3} = -\frac{9}{3} = -3$

b) $J = \int_{1}^{2} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2} = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

c) $K = \int_{-1}^{1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{1} = (-e^{-1}) - (-e^{-(-1)}) = -e^{-1} + e^{1} = -e^{-1} + e$

A noter que : $-e^{-1} + e = -\frac{1}{e} + \frac{e \times e}{e} = -\frac{1}{e} + \frac{e^2}{e} = \frac{-1 + e^2}{e} = \frac{e^2 - 1}{e}$

. . . .

Exercice 68p132

a) $I = \int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0$

b) $J = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}e^{2\times 1} - \frac{1}{2}e^{2\times(-1)} = \frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$

c) $K = \int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{2}e^{2^2} - \frac{1}{2}e^{(-1)^2} = \frac{1}{2}e^{4} - \frac{1}{2}e$

. . . .

Exercice 114p140

$f(x) = \frac{2ln(x) + 1}{x}$, fonction définie sur $]0; +\infty[$.

1. Étudions le signe de la fonction f', fonction dérivée de f définie sur $]0; +\infty[$. Afin de déterminer les variations de f.

   On pose $u(x) = 2ln(x) + 1$, $u'(x) = \frac{2}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{\frac{2}{x} \times x - (2ln(x) + 1) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2 - 2ln(x) - 1}{x^2} \\ &= \frac{-2ln(x) + 1}{x^2} \end{aligned}$$

   - $x^2 > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

•

$$\begin{aligned}-2ln(x)+1&>0\\ -2ln(x)&>-1\\ 2ln(x)&<1\\ ln(x)&<\frac{1}{2}\\ e^{ln(x)}&<e^{\frac{1}{2}}\\ x&<e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

D'après ces résultats, on en déduit le tableau de signe de f' et les variations de f.

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$-2ln(x)+1$		$+$	0	$-$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$	$\searrow$	

$$f(e^{\frac{1}{2}})=\frac{2ln(e^{\frac{1}{2}})+1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\times\frac{1}{2}+1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1+1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}\approx 1,213$$

2. a) $G(x)=u(x)^2$ et $g(x)=2u'(x)u(x)$. G est une primitive de g si et seulement si $G'=g$.
   On remarque que G est de la forme uv car $G(x)=u(x)^2=u(x)\times u(x)$.

$$\begin{aligned}G'(x)&=u'(x)\times u(x)+u(x)\times u'(x)\\ &=u'(x)u(x)+u'(x)u(x)\\ &=2u'(x)u(x)\end{aligned}$$

   G est bien une primitive de g.

   b) $h(x)=\frac{2ln(x)}{x}=2\times\frac{1}{x}\times ln(x)$

   h est de la forme $2u'(x)u(x)$, avec $u(x)=ln(x)$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$.
   D'après la question 2.a, les fonctions de la forme $2u'(x)u(x)$ admettent comme primitive des fonctions de la forme $u(x)^2+C$, avec $C\in\mathbb{R}$.
   On en déduit alors que H une primitive de h, a pour expression :
   $H(x)=ln(x)^2$

   c) Soit F une primitive de f.
   On remarque que $f(x)=\frac{2ln(x)+1}{x}=\frac{2ln(x)}{x}+\frac{1}{x}$.
   D'après la question 2.b, la fonction $x\mapsto\frac{2ln(x)}{x}$ admet comme primitive $x\mapsto ln(x)^2$.
   De plus, la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ admet comme primitive $x\mapsto ln(x)$.

Comme la primitive d'une somme est la somme des primitives, on en déduit que :
$F(x) = ln(x)^2 + ln(x)$

d) $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{2ln(x)+1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[ln(x)^2 + ln(x)\right]_1^5$
$= (ln(5)^2 + ln(5)) - (ln(1)^2 + ln(1)) = (ln(5)^2 + ln(5)) - (0^2 + 0) = ln(5)^2 + ln(5)$

3. On applique la formule : $m = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, sur l'intervalle $[1;5]$.

$m = \displaystyle\frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(ln(5)^2 + ln(5)) \approx 1,05$

La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est d'environ 1,05€.