Correction des exercices 85,86p134

Exercice 85p134
$f(x) = e^{3x}$ fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit F une primitive de f.

   f est de la forme e^{ax+b}, elle admet comme primitives les fonctions de la forme $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

   Ainsi $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$

   On applique la formule $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sur $[1;4]$.

   $m = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^4 e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{3}e^{3x}\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3\times 4} - \frac{1}{3}e^{3\times 1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{12} - \frac{1}{3}e^{3}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}e^{12} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}e^{3} = \frac{1}{9}e^{12} - \frac{1}{9}e^{3} \approx 18081,6$

2. La valeur approchée de l'augmentation moyenne chaque année de la population est d'environ 18 082 individus.

Exercice 86p134
$f(x) = xe^{2-x}$ et $F(x) = (-x-1)e^{2-x}$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

1. F est une primitive de f si et seulement si $F' = f$.

   F est de la forme uv.

   On pose $u(x) = -x-1$, $u'(x) = -1$, $v(x) = e^{2-x}$, $v'(x) = -e^{2-x}$.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= -1 \times e^{2-x} + (-x-1) \times (-e^{2-x}) \\
&= -e^{2-x} + (-x) \times (-e^{2-x}) + (-1) \times (-e^{2-x}) \\
&= -e^{2-x} + xe^{2-x} + e^{2-x} \\
&= \cancel{-e^{2-x}} + xe^{2-x} + \cancel{e^{2-x}} \\
&= xe^{2-x} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

   F est bien une primitive de f.

2. On applique la formule $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sur $[0;4]$.

   $m = \frac{1}{4-0}\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^4 xe^{2-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[(-x-1)e^{2-x}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left((-4-1)e^{2-4} - (-0-1)e^{2-0}\right) = \frac{1}{4}\left(-5e^{-2} - (-1)e^{2}\right) = \frac{1}{4}\left(-5e^{-2} + e^{2}\right) = \frac{1}{4} \times (-5e^{-2}) + \frac{1}{4}e^{2} = -\frac{5}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{2}$