Partie A

I

1. $f(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{x+1} - 1$

   - La dérivée $x \mapsto \dfrac{3}{2}x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{3}{2}$ sur $[0;1]$.
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est la forme $\dfrac{1}{v}$ qui a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$. Ainsi la dérivée fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ est la fonction $\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ sur $[0;1]$.
   - La dérivée $x \mapsto -1$ est la fonction $x \mapsto 0$ sur $[0;1]$.

   On en déduit que :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3}{2} + \frac{-1}{(x+1)^2} + 0 \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{3}{2} \times \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{2}{2} \times \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} - \frac{2 \times 1}{2(x+1)^2} \\
&= \frac{3(x+1)^2}{2(x+1)^2} - \frac{2}{2(x+1)^2} \\
&= \frac{3(x+1)^2 - 2}{2(x+1)^2} \\
&= \frac{3(x^2+2x+1) - 2}{2(x+1)^2} \\
&= \frac{3x^2+6x+3-2}{2(x+1)^2} \\
&= \frac{3x^2+6x+1}{2(x+1)^2}
\end{aligned}$$

   $3x^2 + 6x + 1 > 0$ pour tout $x \in [0;1]$ et $2(x+1)^2 > 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

   Par conséquent $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0;1]$.

   Donc f est strictement croissante sur $[0;1]$.

   $f(0) = \dfrac{3}{2} \times 0 + \dfrac{1}{0+1} - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$

   $f(1) = \dfrac{3}{2} \times 1 + \dfrac{1}{1+1} - 1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	1

2.

$$
\begin{aligned}
x - f(x) &= x - \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1\right) \\
&= x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 \\
&= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 \\
&= -\frac{1}{2}x \times \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{2} \times \frac{1}{x+1} + 1 \times \frac{2(x+1)}{2(x+1)} \\
&= -x\frac{(x+1)}{2(x+1)} - \frac{2}{2(x+1)} + \frac{2(x+1)}{2(x+1)} \\
&= \frac{-x(x+1) - 2 + 2(x+1)}{2(x+1)} \\
&= \frac{-x^2 - x - 2 + 2x + 2}{2(x+1)} \\
&= \frac{-x^2 + x}{2(x+1)} \\
&= \frac{x(-x+1)}{2(x+1)}
\end{aligned}
$$

- $x \geqslant 0$ sur $[0;1]$.
- $-x + 1 \geqslant 0$ sur $[0;1]$.
- $2(x+1) > 0$ sur $[0;1]$.

Comme $x(-x+1) \geqslant 0$ et que $2(x+1) > 0$ sur $[0;1]$, alors $\dfrac{-x(1-x)}{2(x+1)} \geqslant 0$ sur $[0;1]$.

On en déduit que pour tout $x \in [0;1]$:

$$
\begin{aligned}
x - f(x) &\geqslant 0 \\
x &\geqslant f(x) \\
f(x) &\leqslant x
\end{aligned}
$$

3.
- f est définie sur $[0;1]$.
- f est strictement croissante sur $[0;1]$.
- $f(x) \leqslant x$ sur $[0;1]$.
- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On en déduit que la courbe représentative de la fonction f est une courbe de Lorenz.

II

1. a) $g(x) = e^x - (e-2)x - 1 = e^x - xe + 2x - 1$
   Ainsi $g'(x) = e^x - e + 2$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &> 0 \\
e^x - e + 2 &> 0 \\
e^x &> e - 2 \\
ln(e^x) &> ln(e-2) \\
x &> ln(e-2)
\end{aligned}
$$

$ln(e-2) \approx -0,33$

On en déduit le tableau de signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$ln(e-2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Par conséquent,

x	0		1
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

b) $g(0) = e^0 - (e-2) \times 0 - 1 = 1 - 0 + 1 = 0$

$g(1) = e^1 - (e-2) \times 1 - 1 = e - e + 2 - 1 = 1$

2. a)

x	0		$ln(e-1)$		1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$h(ln(e-1))$	$\searrow$	0

On rappelle que $h(x) = -e^x + (e-1)x + 1$.

- $h(0) = -e^0 + (e-1) \times 0 + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$.
- $h(1) = -e^1 + (e-1) \times 1 + 1 = -e + e - 1 + 1 = 0$.
- $h(ln(e-1)) = -e^{ln(e-1)} + (e-1) \times ln(e-1) + 1 = -e + 1 + eln(e-1) - ln(e-1) + 1 = eln(e-1) - ln(e-1) - e + 2 \approx 0,2$

b)

$$\begin{aligned} x - g(x) &= x - (e^x - (e-2)x - 1) \\ &= x - e^x + (e-2)x + 1 \\ &= -e^x + x((e-2) + 1) + 1 \\ &= -e^x + x(e - 2 + 1) + 1 \\ &= -e^x + x(e-1) + 1 \\ &= -e^x + (e-1)x + 1 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

D'après la question II.2.a, on observe sur le tableau de variations que $h(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$.

Ainsi pour tout $x \in [0;1]$:

$$\begin{aligned} h(x) &\geqslant 0 \\ x - g(x) &\geqslant 0 \\ x &\geqslant g(x) \\ g(x) &\leqslant x \end{aligned}$$

3. D'après les réponses aux questions précédentes :

- g est définie sur $[0;1]$.

- g est strictement croissante sur $[0;1]$.
- $g(x) \leqslant x$ sur $[0;1]$.
- $g(0)=0$ et $g(1)=1$.

On en déduit que la courbe représentative de la fonction g est une courbe de Lorenz.

Partie B

1. On rappelle que $g(x)=e^x-(e-2)x-1$
   $g(0,5)=e^{0,5}-(e-2)\times 0,5-1=e^{0,5}-0,5e+2\times 0,5-1=e^{0,5}-0,5e+1-1=e^{0,5}-0,5e\approx 0,29.$
   50% des exploitations les plus petites représentent 29% de la superficie des exploitations du pays G.

2. a)

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_0^1 x-g(x)\,dx \\
&= \int_0^1 h(x)\,dx \\
&= \int_0^1 -e^x+(e-1)x+1\,dx \\
&= \left[-e^x+(e-1)\times\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 \\
&= \left(-e^1+(e-1)\times\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(-e^0+(e-1)\times\frac{0^2}{2}+0\right) \\
&= \left(-e+\frac{1}{2}(e-1)+1\right)-(-1+0+0) \\
&= -e+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}+1+1 \\
&= -\frac{1}{2}e+\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

   b) $\mathscr{A}=-\dfrac{1}{2}e+\dfrac{3}{2}\approx 0,14$ unités d'aire.
   Ainsi son coefficient de Gini $\gamma_G=2\times\mathscr{A}\approx 0,28$.

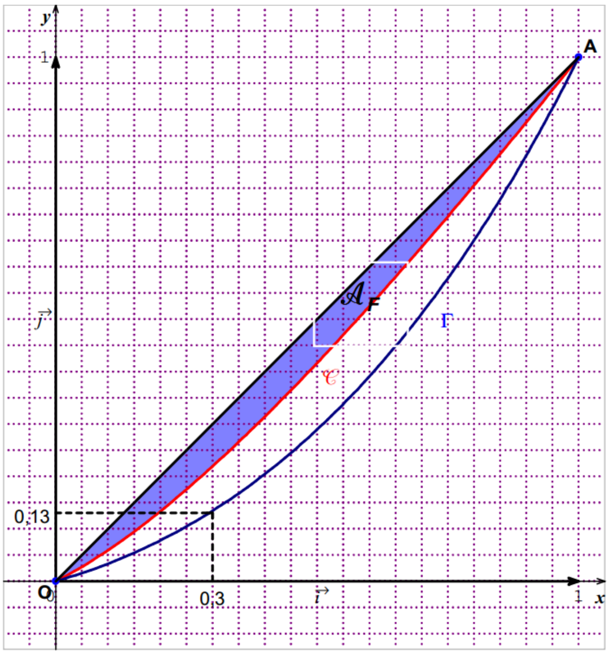
3.

$$
\begin{aligned}
\gamma_F &= 2\int_0^1 x - f(x)\,dx \\
&= 2\int_0^1 x - \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1\right)\,dx \\
&= 2\int_0^1 x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1\,dx \\
&= 2\int_0^1 -\frac{1}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1\,dx \\
&= 2\left[-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2} - ln(x+1) + x\right]_0^1 \\
&= 2\left[-\frac{1}{4}x^2 - ln(x+1) + x\right]_0^1 \\
&= 2\left(\left(-\frac{1}{4}1^2 - ln(1+1) + 1\right) - \left(-\frac{1}{4}0^2 - ln(0+1) + 0\right)\right) \\
&= 2\left(\left(-\frac{1}{4} - ln(2) + 1\right) - (-0 - ln(1) + 0)\right) \\
&= 2\left(\left(\frac{3}{4} - ln(2)\right) - (-0 - 0 + 0)\right) \\
&= 2\left(\frac{3}{4} - ln(2)\right) \\
&= 2\times\frac{3}{4} - 2ln(2) \\
&= \frac{3}{2} - 2ln(2) \\
&\approx 0,22
\end{aligned}
$$

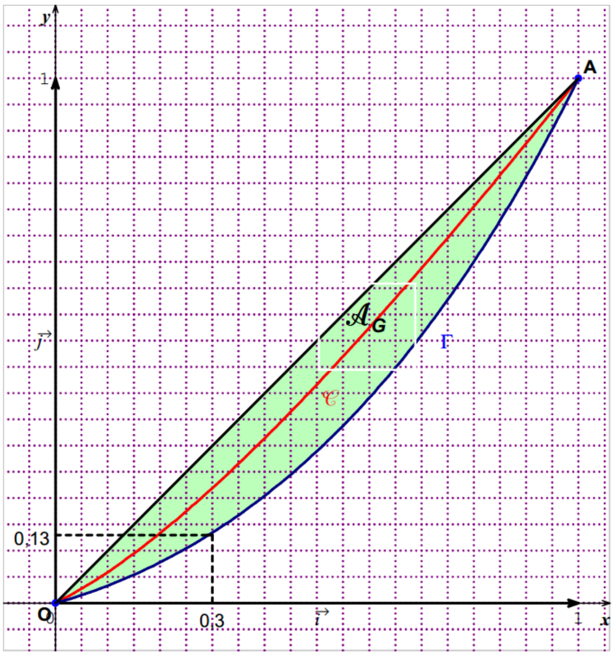
4. a) Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire. Donc la répartition est la plus égalitaire pour le pays F.

   b) Par définition, $\gamma_F = 2\mathscr{A}_F$ et $\gamma_G = 2\mathscr{A}_F$.

   Daprès les graphiques ci-dessous, on remarque que $\mathscr{A}_G < \mathscr{A}_G$. Par conséquent, $\gamma_F < \gamma_G$. Ce qui confirme que la répartition est la plus égalitaire pour le pays F.



y
1
A
$\mathscr{A}_F$
Γ
0,13
0,3
1
x



y
1
A
$\mathscr{A}_G$
Γ
0,13
0,3
1
x