Chapitre 7 : Probabilité à densité

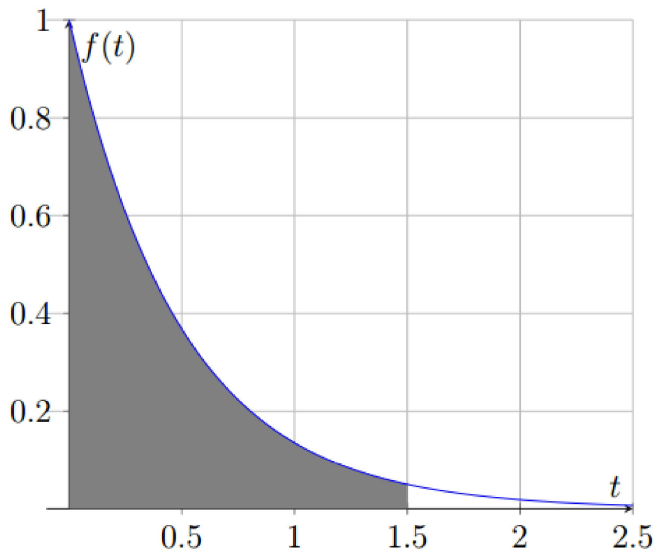
Savoirs faire à acquérir

- Comprendre les notions de variable aléatoire continue, fonction de densité de probabilité.
- Déterminer graphiquement la valeur approchée ou exacte d'une probabilité à densité.
- Connaître les propriétes des probabilités à densité.
- Reconnaître, utiliser la loi uniforme et ses propriétes.
- Reconnaître, utiliser la loi normale centrée réduite et ses propriétes.
- Reconnaître, utiliser la loi normale et ses propriétes.
- Reconnaître graphiquement une loi normale et ses paramètres.
- Utiliser la calculatrice pour calculer la probabilité d'une variable aléatoire suivant la loi normale.

1 Introduction

Nous avons déjà travaillé sur les variables aléatoires. Par exemple, pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale, celle-ci compte le nombre de succès dans une expérience aléatoire. On dit que cette variable aléatoire est discrète. Une variable aléatoire discrète prend ses valeurs dans un ensemble dénombrable ou fini, c'est à dire un ensemble où l'on peut compter les valeurs. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, et même $\mathbb{Q}$ sont des ensembles dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Pourtant ces nombres réels sont présents dans notre quotidien. Si l'on créer une variable aléatoire X associant le bon fonctionnement de la batterie d'un Iphone pour une durée t exprimée en dizaines de milliers d'heures appartenant à l'intervalle $I = [0\ ;\ 2,5]$. Les valeurs de X appartiennent à l'ensemble I, prenant des valeurs réelles. On dira que X est une variable aléatoire continue.



L'usage d'une variable aléatoire continue s'applique en probabilité. Pour X une variable aléatoire prenant des valeurs réelles et qui suit une loi de probabilité. Alors, les probabilités sont déterminées avec l'aide d'une fonction, que l'on appelle fonction de densité de probabilité.

Exemple : On cherche $P(X \leqslant 1,5)$, c'est à dire la probabilité que la batterie tienne moins de 15000 heures. X a pour fonction de densité de probabilité f, (représentée à gauche). La probabilité $P(X \leqslant 1,5)$ est déterminée par l'aire sous la courbe de la f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1,5]$.

Ainsi en connaissant la forme algébrique de la fonction f, on pourra calculer avec l'aide de l'outil intégrale la probabilité $P(X \leqslant 1,5)$ qui s'exprimera par le calcul :

$$P(X \leqslant 1,5) = \int_0^{1,5} f(t)dt$$

Afin de nous familiariser avec cette notion, faîtes l'activité 1 page 174.

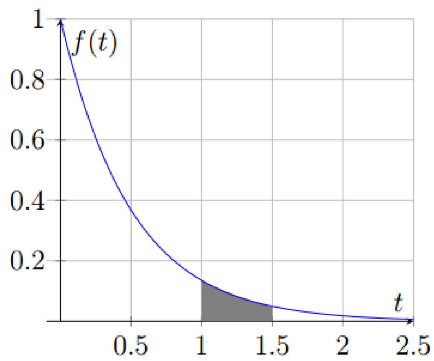
2 Variable aléatoire à densité réelle

Définition 1

1. On appelle fonction de densité de probabilité, toute fonction définie, continue et positive sur un intervalle I telle que son intégrale sur I soit égale à 1.
2. On appelle variable aléatoire à densité, la variable aléatoire X prenant ses valeurs sur un intervalle I telle que la fonction de densité de probabilité f soit définie sur I.
3. La probabilité sur un intervalle $[a;b]$ d'une variable aléatoire X à densité de fonction de densité de probabilité f définie sur un intervalle I (Avec $[a;b] \subset I$) :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$$

Représentation graphique :



On considère F une primitive de f.

$$\begin{aligned} P(1 \leqslant X \leqslant 1,5) &= \int_1^{1,5} f(t)dt \\ &= F(1,5) - F(1) \\ &= F(1,5) - F(0) - F(1) + F(0) \\ &= (F(1,5) - F(0)) - (F(1) - F(0)) \\ &= \int_0^{1,5} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt \\ &= P(X \leqslant 1,5) - P(X \leqslant 1) \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés connues des intégrales, nous allons pouvoir déterminer différentes propriétés de calculs.

Propriété 1 Pour tous réels a, b dans l'intervalle I :

1. $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$
2. $P(X = a) = 0$
3. $P(X < b) = P(X \leqslant b)$
4. $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$
5. $P(X > a) = P(X \geqslant a) = 1 - P(X \leqslant a) = 1 - P(X < a)$

Démonstration.

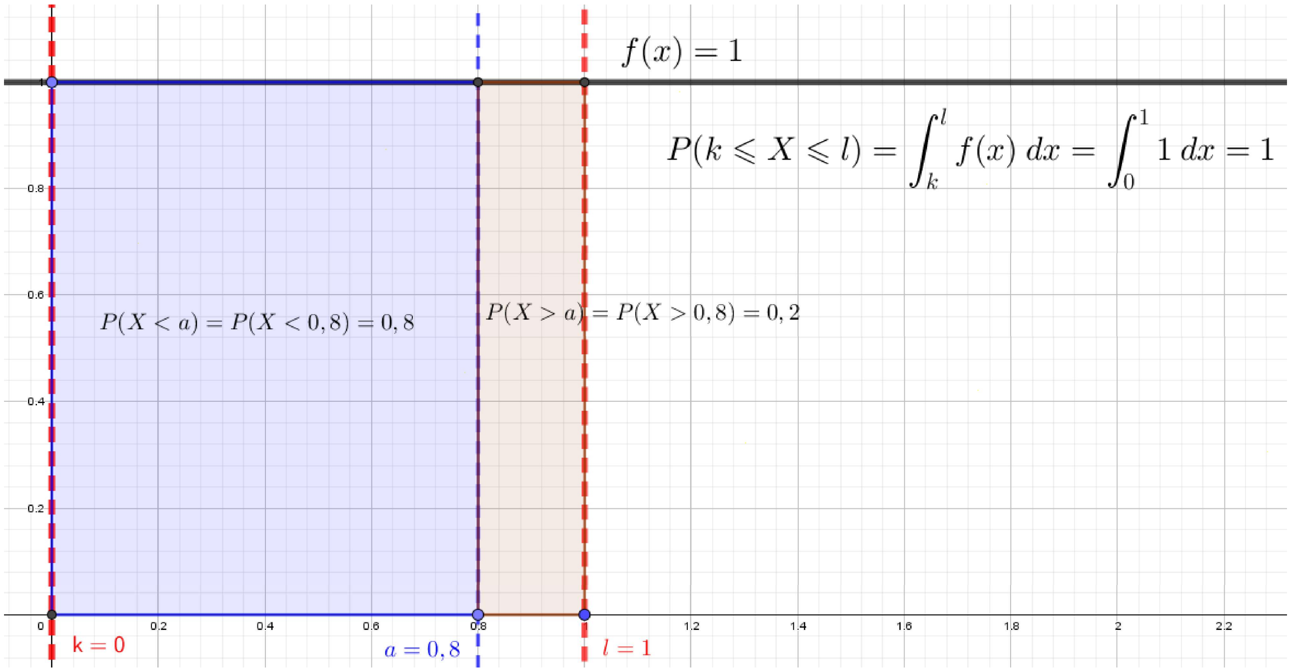
1.

$$\begin{aligned} P(a \leqslant X \leqslant b) &= \int_a^b f(t)dt \\ &= F(b) - F(a) \\ &= F(b) - F(0) - F(a) + F(0) \\ &= (F(b) - F(0)) - (F(a) - F(0)) \\ &= \int_0^b f(t)dt - \int_0^a f(t)dt \\ &= P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a) \end{aligned}$$

2. $P(X = a) = P(a \leqslant X \leqslant a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0.$

3. En utilisant le 2. :
$P(X \leqslant b) = P(X < b) + P(X = b) = P(X < b) + 0 = P(X < b)$
4. Conséquence du 3. appliqué au 1.
5. On défini : $I = [k;l]$ tel que $[a;b] \subset [k;l]$, avec $k < l$.
Ainsi : $P(k \leqslant X \leqslant l) = \int_k^l f(t)dt = 1$
$1 - P(X \leqslant a) = P(k \leqslant X \leqslant l) - P(k \leqslant X \leqslant a) = \int_k^l f(t)dt - \int_k^a f(t)dt$
$= \int_k^l f(t)dt + \int_a^k f(t)dt = \int_a^l f(t)dt = P(X \geqslant a).$

Exemple graphique :



Définition 2 Soit X une variable aléatoire à densité de fonction de densité de probabilité f définie sur $[a;b]$. Alors l'espérance de X sur $[a;b]$ est le réel déterminé par :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)dt$$

3 Loi uniforme

Définition 3 Soient a et b deux réels tels que $a < b$. La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi qui a pour fonction de densité de probabilité définie sur $[a;b]$:

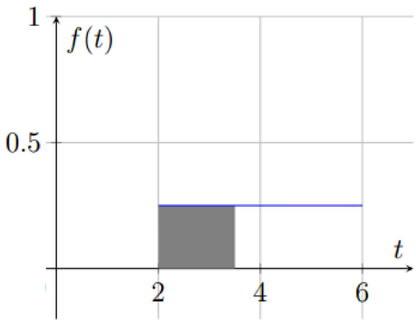
$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

Propriété 2 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$:

1. Pour tout $x \in [a;b]$, $P(X \leqslant x) = P(a \leqslant X \leqslant x) = \dfrac{x-a}{b-a}$
2. $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Représentation graphique :

$b = 6$, $a = 2$, l'intervalle $[a;b] = [2;6]$, $f(t) = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{6-2} = \dfrac{1}{4}$.



On considère F une primitive de f. On obtient en utilsant la formule de la propriété 3 :

$$\begin{aligned} P(2 \leqslant X \leqslant 3,5) &= \frac{3,5-2}{6-2} \\ &= \frac{1,5}{4} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

On remarque que l'aire du rectangle est égale à : $\dfrac{1}{4} \times 1,5 = \dfrac{1,5}{4} = \dfrac{3}{8}$.

Démonstration.

1. Pour tout $x \in [a;b]$, $P(X \leqslant x) = P(a \leqslant X \leqslant x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{b-a}\,dt = \left[x \times \frac{1}{b-a}\right]_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$
2. $E(X) = \displaystyle\int_a^b t f(t) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\,dt = \left[\frac{t^2}{2} \times \frac{1}{b-a}\right]_a^b = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{\cancel{(b-a)}(b+a)}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b+a}{2} = \frac{a+b}{2}$

4 Loi normale centrée réduite

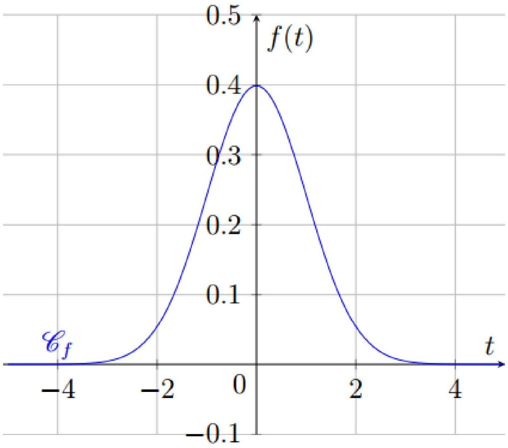
4.1 Définition et propriétés

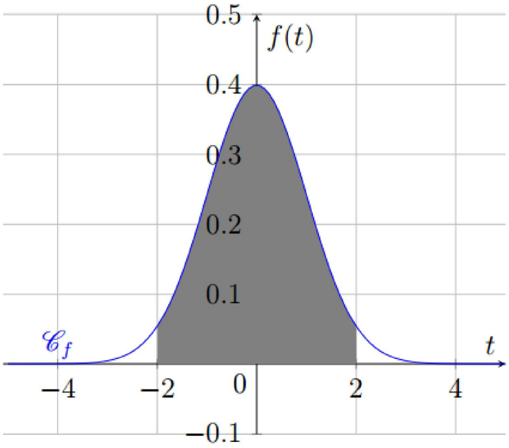
Définition 4 La loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0;1)$ est la loi qui a pour fonction de densité de probalité définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Représentation graphique :

La courbe de Gauss



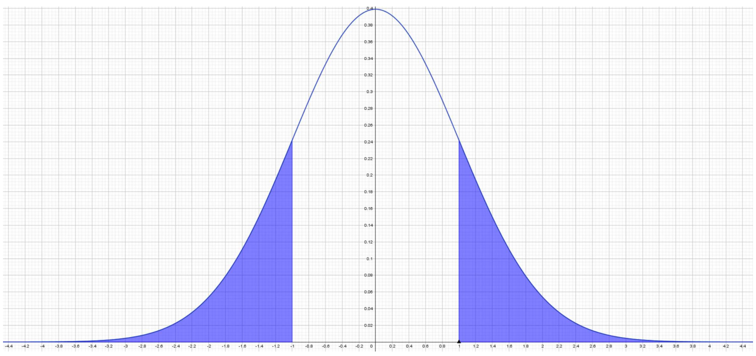


Propriété 3 Soit X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors :

$$E(X) = 0$$

Propriété 4 Soit X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors :
1. $P(X \leqslant -a) = P(X \geqslant a)$ (par symétrie de la courbe)
2. $P(X \leqslant -a) = 1 - P(X < a)$
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 2P(X \leqslant a) - 1$
4. $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) \approx 0{,}95$

Démonstration.
1. Idée de la démonstration grâce à la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées. Ici $a = 1$ et $-a = -1$.



2. $P(X \leqslant -a) = P(X > a) = 1 - P(X < a)$, d'après le 5. de la propriété 1.
3. $P(-a \leqslant X \leqslant a) = P(X \leqslant a) - P(X \leqslant -a) = P(X \leqslant a) - (1 - P(X \leqslant a)) = P(X \leqslant a) - 1 + P(X \leqslant a) = 2P(X \leqslant a) - 1$.
4. Résultat obtenu à la calculatrice.

4.2 Utilisation de la calculatrice

Aller dans OPTN -> STAT -> DIST -> NORM :
- Pour calculer $P(a < X < b)$, il faut choisir : Ncd(a,b).
- Pour calculer $P(X < b)$, il faut choisir : Ncd(a,b), avec $a = -10^{99}$. (on fait une approximation)

- Pour calculer k tel que $P(X < k) = c$, il faut choisir : InvN(c)

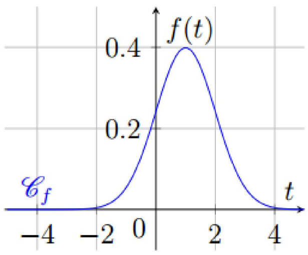
Verifier que pour X suivant la normale centrée réduite que :

- $P(2 < X < 3) \approx 0,0214$
- $P(X < 0,5) \approx 0,6915$
- $P(X < k) = 0,5$ pour $k = 0$

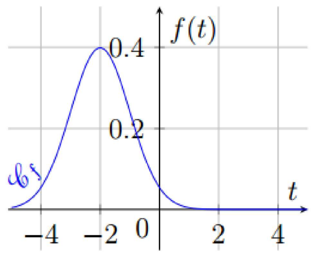
5 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Propriété 5 Soient μ un réel et σ un réel positif. X suit la loi normale de paramètres μ, σ notée $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si et seulement si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite.

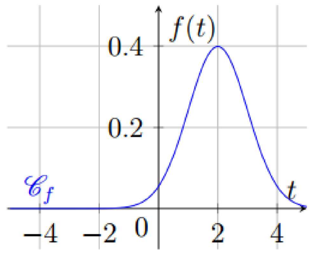
Représentations graphiques :



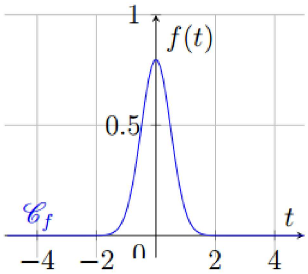
$\mu = 1,\ \sigma = 1$



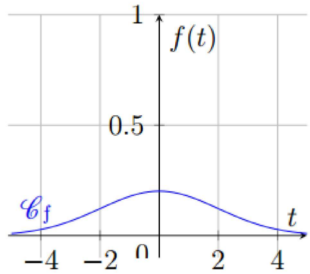
$\mu = -2,\ \sigma = 1$



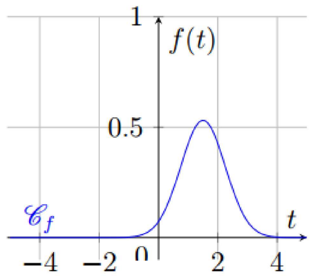
$\mu = 2,\ \sigma = 1$



$\mu = 0,\ \sigma = 0,5$



$\mu = 0,\ \sigma = 2$



$\mu = 1,5,\ \sigma = 0,75$

R [Hors programme] Soit X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ a pour fonction de densité de probabilité définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Propriété 6 Soit X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors :

$$E(X) = \mu$$

Propriété 7 Soit X qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, alors :

1. $P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0,683$
2. $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0,954$
3. $P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0,997$

5.1 Utilisation de la calculatrice

Aller dans OPTN -> STAT -> DIST -> NORM :

- Pour calculer $P(a < X < b)$, il faut choisir : Ncd(a,b,σ, μ).
- Pour calculer $P(X < b)$, il faut choisir : Ncd(a,b,σ, μ), avec $a = -10^{99}$. (on fait une approximation)
- Pour calculer k tel que $P(X < k) = c$, il faut choisir : InvN(c,σ,μ)

Verifier que pour X suivant la normale $\mathcal{N}(2\ ;\ 0,25)$ que :

- $P(2 < X < 3) \approx 0,4772$
- $P(X < 0,5) \approx 1,3499 \times 10^{-3}$
- $P(X < k) = 0,5$ pour $k = 2$

6 QCM Test

Entraine-toi pour le devoir ou pour simplement réviser avec le QCM en ligne en scannant le QR-code ou en cliquant tout simplement dessus ;)