

## DEVOIR MAISON N° 12

***Courbe de Lorenz et indice de Gini***

***Pour le 3 mai 2010***

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction  $L$  vérifiant les conditions suivantes :

- $L$  est définie sur  $[0 ; 1]$  ;
- $L$  est croissante sur  $[0 ; 1]$  ;
- $L(0) = 0$  et  $L(1) = 1$  ;
- pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ ,  $L(x) \leq x$ .

**PARTIE A** : les parties I et II sont indépendantes.

*Le but de la partie A est de vérifier que les fonctions  $f$  et  $g$  considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.*

I. Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$ .

- 1) Déterminer la dérivée de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0 ; 1]$ .
- 2) Déterminer le signe de  $x - f(x)$  sur  $[0 ; 1]$ .
- 3) Conclure.

II.

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par  $g(x) = e^x - (e-2)x - 1$ .

- a) Calculer  $g'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $[0 ; 1]$ .
- b) Calculer  $g(0)$  et  $g(1)$ .

2) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0 ; 1]$  par  $h(x) = -e^x + (e-1)x + 1$ .

a) Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de  $h$  (que l'on ne demande pas de calculer).

$x$	0	ln(e-1)	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-

Dresser le tableau de variation de  $h$  ; on précisera l'arrondi à 0,1 de  $h(\ln(e-1))$ .

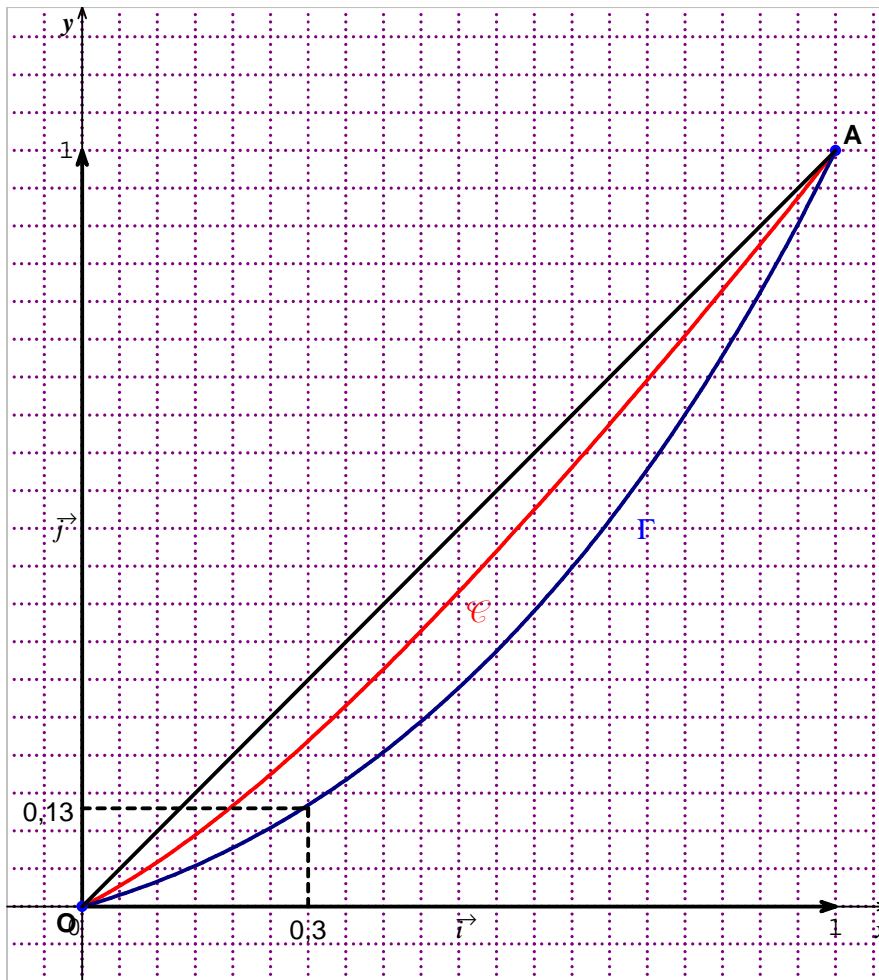
b) Vérifier que pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ , on a :  $h(x) = x - g(x)$ .

À l'aide de II. 2) a), montrer que pour tout  $x$  de  $[0 ; 1]$ , on a  $g(x) \leq x$ .

3) Conclure.

### **PARTIE B**

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes respectives  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  des fonctions  $f$  et  $g$ , et le segment  $[OA]$  où  $A$  est le point de coordonnées  $(1 ; 1)$ .



- 1) On suppose que la courbe de Lorenz  $\Gamma$  illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G.  
 En abscisse,  $x$  représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.  
 En ordonnées,  $g(x)$  représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.  
 Par exemple, comme l'arrondi de  $g(0,3)$  à  $10^{-2}$  est 0,13 on dit que 30% des exploitations les plus petites représentent au total 13% de la superficie des exploitations du pays G.  
 Donner la valeur arrondie à 0,01 de  $g(0,5)$ . Interpréter ce résultat.
- 2) On appelle coefficient de Gini pour le pays G, le nombre  $2\mathcal{A}$  où  $\mathcal{A}$  est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment  $[OA]$  et la courbe  $\Gamma$ . On le note  $\gamma_G$ .
  - a) Exprimer cette aire  $\mathcal{A}$  à l'aide d'une intégrale.  
 Déterminer la valeur exacte de cette aire.
  - b) Donner la valeur arrondie à 0,01 de cette aire.
- 3) La représentation graphique  $\mathcal{C}$  de  $f$  est la courbe de Lorenz pour un pays F.  
 Calculer  $\gamma_F$  le coefficient de Gini pour le pays F.  
 En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.
- 4) Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.
  - a) Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?
  - b) Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?