

DEVOIR MAISON N° 12

Courbe de Lorenz et indice de Gini

Pour le 3 mai 2010

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie sur $[0 ; 1]$;
- L est croissante sur $[0 ; 1]$;
- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
- pour tout x de $[0 ; 1]$, $L(x) \leq x$.

PARTIE A : les parties I et II sont indépendantes.

Le but de la partie A est de vérifier que les fonctions f et g considérées satisfont aux conditions énoncées ci-dessus.

I. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{x+1} - 1$.

- 1) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 1]$.
- 2) Déterminer le signe de $x - f(x)$ sur $[0 ; 1]$.
- 3) Conclure.

II.

1) Soit g la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $g(x) = e^x - (e-2)x - 1$.

- a) Calculer $g'(x)$. En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; 1]$.
- b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.

2) Soit h la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $h(x) = -e^x + (e-1)x + 1$.

a) Le tableau suivant donne le signe de la dérivée de h (que l'on ne demande pas de calculer).

x	0	$\ln(e-1)$	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-

Dresser le tableau de variation de h ; on précisera l'arrondi à 0,1 de $h(\ln(e-1))$.

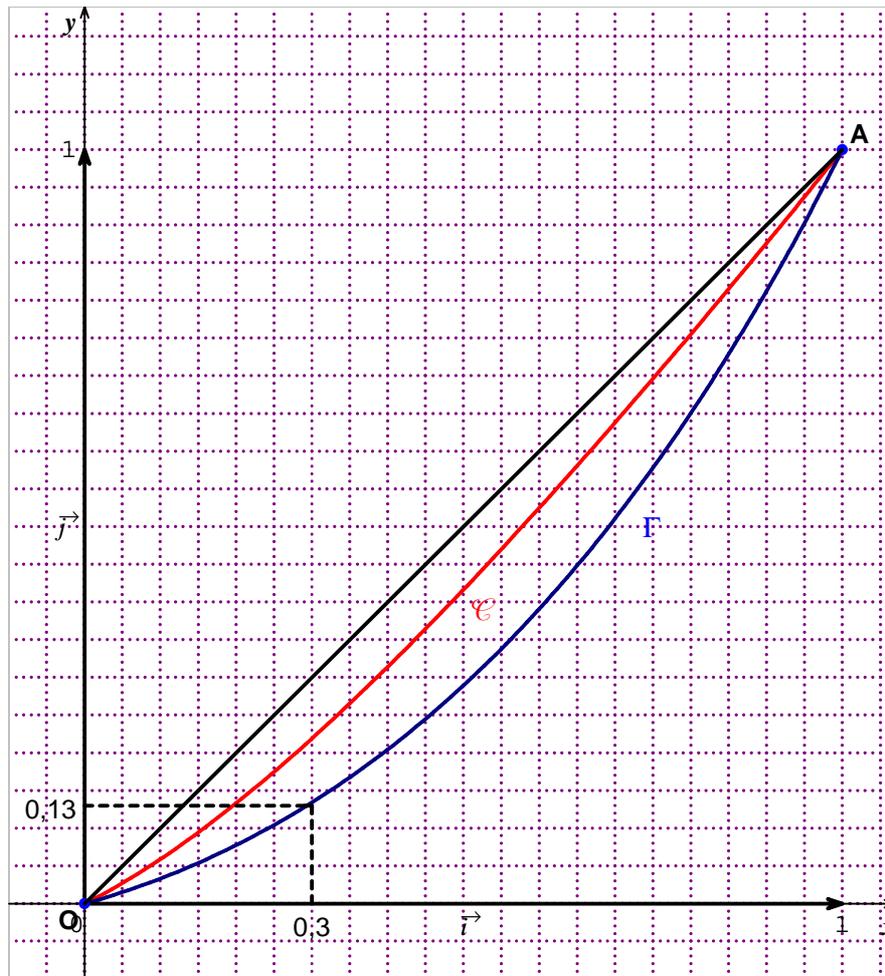
b) Vérifier que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $h(x) = x - g(x)$.

À l'aide de II. 2) a), montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a $g(x) \leq x$.

3) Conclure.

PARTIE B

Sur le graphique ci-dessous sont tracées les courbes respectives \mathcal{C} et Γ des fonctions f et g , et le segment $[OA]$ où A est le point de coordonnées $(1 ; 1)$.



- 1) On suppose que la courbe de Lorenz Γ illustre la répartition des surfaces des exploitations agricoles d'un pays G.
 En abscisse, x représente le pourcentage du nombre des exploitations les plus petites par rapport au nombre total des exploitations du pays.
 En ordonnées, $g(x)$ représente le pourcentage total des superficies de ces exploitations.
 Par exemple, comme l'arrondi de $g(0,3)$ à 10^{-2} est 0,13 on dit que 30% des exploitations les plus petites représentent au total 13% de la superficie des exploitations du pays G.
 Donner la valeur arrondie à 0,01 de $g(0,5)$. Interpréter ce résultat.
- 2) On appelle coefficient de Gini pour le pays G, le nombre $2\mathcal{A}$ où \mathcal{A} est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par le segment $[OA]$ et la courbe Γ . On le note γ_G .
 - a) Exprimer cette aire \mathcal{A} à l'aide d'une intégrale.
 Déterminer la valeur exacte de cette aire.
 - b) Donner la valeur arrondie à 0,01 de cette aire.
- 3) La représentation graphique \mathcal{C} de f est la courbe de Lorenz pour un pays F.
 Calculer γ_F le coefficient de Gini pour le pays F.
 En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 0,01.
- 4) Plus le coefficient de Gini est petit, plus la répartition des exploitations est égalitaire.
 - a) Quel est le pays pour lequel la répartition est la plus égalitaire ?
 - b) Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?