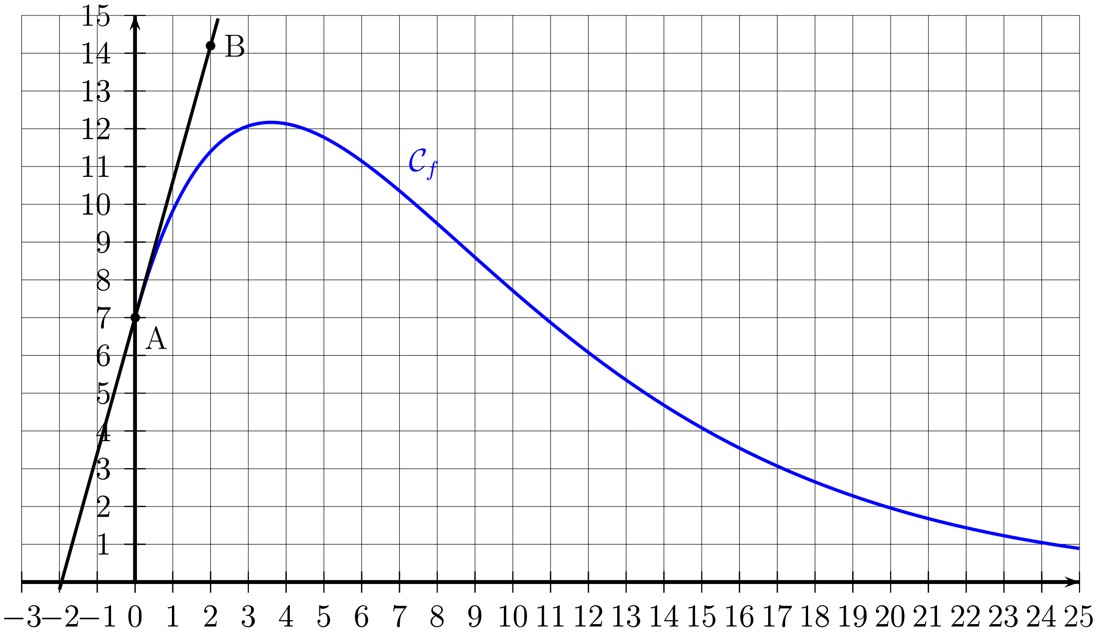
Partie A

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ 25]$ par :

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où a et b sont deux nombres réels.
On a représenté également sa tangente T au point A$(0\ ;\ 7)$. T passe par le point B$(2\ ;\ 14{,}2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.

2. a) Déterminer, par un calcul. le coefficient directeur de la droite T.
   b) Exprimer, pour tout $x \in [0\ ;\ 25]$, $f'(x)$ en fonction de a et b.
   c) Montrer que a et b sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcr} a - 0,2b & = & 3,6 \\ b & = & 7 \end{array}\right.$$

   En déduire la valeur de a.

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 25]$ par

$$f(x) = (5x + 7)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

   Justifier.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ 25]$.
   Donner une valeur approchée au dixième de α.

3. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant.

`Dériver` $((-25x-160)\mathrm{e}^{-0,2x})$
$(5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$

Exploiter ce résultat pour donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie C

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable. Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la plage se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
La bordure est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie précédente.

1. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine ?
2. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.

   Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre?