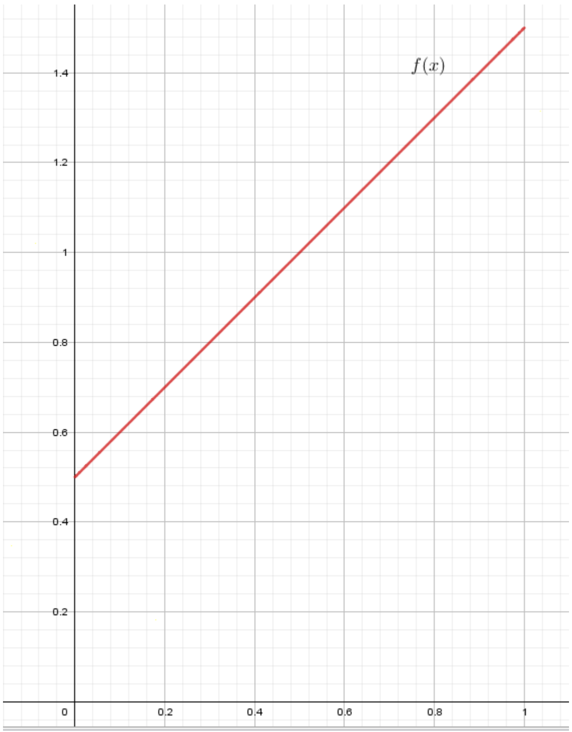
Correction des exercices 37,40,45p184

Ex 37 p184

1. a)



b) f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1]$ si et seulement si :

- f est continue sur $[0;1]$. C'est le cas, toutes fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$ est donc sur $[0;1]$.
- $f(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$.
- $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

Montrons que f vérifie ces conditions :

- $$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ x + \frac{1}{2} &> 0 \\ x &> -\frac{1}{2} \\ x &> -0,5 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-0.5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$f(x) > 0$ sur $[0;1]$.

- $$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 x+\frac{1}{2}\,dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}\times 1\right)-\left(\frac{0^2}{2}+\frac{1}{2}\times 0\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

  Donc f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1]$.

2. a)

$$\begin{aligned}P(X<0,25) &= \int_0^{0,25} f(x)\,dx\\ &= \int_0^{0,25} x+\frac{1}{2}\,dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_0^{0,25}\\ &= \left(\frac{0,25^2}{2}+\frac{1}{2}\times 0,25\right)-\left(\frac{0^2}{2}+\frac{1}{2}\times 0\right)\\ &= \frac{1}{32}+\frac{1}{8}\\ &= \frac{5}{32}\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}P(X>\frac{1}{3}) &= \int_{\frac{1}{3}}^1 f(x)\,dx\\ &= \int_{\frac{1}{3}}^1 x+\frac{1}{2}\,dx\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{1}{3}}^1\\ &= \left(\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2}\times 1\right)-\left(\frac{\frac{1}{3}^2}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\\ &= 1-\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{6}\right)\\ &= 1-\frac{4}{18}\\ &= \frac{14}{18}\\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
P(0,1 < X < 0,1) &= \int_{0,1}^{0,7} f(x)\,dx \\
&= \int_{0,1}^{0,7} x + \frac{1}{2}\,dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_{0,1}^{0,7} \\
&= \left(\frac{0,7^2}{2} + \frac{1}{2} \times 0,7\right) - \left(\frac{0,1^2}{2} + \frac{1}{2} \times 0,1\right) \\
&= (0,245 + 0,35) - (0,005 + 0,05) \\
&= 0,595 - 0,055 \\
&= 0,54
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 + \frac{1}{2}x\,dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{4}\right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{4}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0}{3} + \frac{0}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}
$$

Ex 40 p184

a)

$$
\begin{aligned}
P(X \leqslant 2) &= \int_0^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^2 e^{-x}\,dx \\
&= \left[-e^{-x}\right]_0^2 \\
&= (-e^{-2}) - (-e^{-0}) \\
&= -e^{-2} - (-1) \\
&= 1 - e^{-2}
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X > 1) = 1 - P(X < 1) &= 1 - \int_0^1 f(x)\,dx \\
&= 1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx \\
&= 1 - \left[-e^{-x}\right]_0^1 \\
&= 1 - ((-e^{-1}) - (-e^{-0})) \\
&= 1 - (-e^{-1} - (-1)) \\
&= 1 - (1 - e^{-1}) \\
&= 1 - 1 + e^{-1} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
P(0,5 < X < 1,5) &= \int_{0,5}^{1,5} f(x)\,dx \\
&= \int_{0,5}^{1,5} e^{-x}\,dx \\
&= \left[-e^{-x}\right]_{0,5}^{1,5} \\
&= (-e^{-1,5}) - (-e^{-0,5}) \\
&= -e^{-1,5} - (-e^{-0,5}) \\
&= -e^{-1,5} + e^{-0,5} \\
&= e^{-0,5} - e^{-2}
\end{aligned}$$

Ex 45 p184

1. a) $P(T < 10) = \dfrac{10-0}{15-0} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{1}{3}$.

   b) $P(T < 0,5) = \dfrac{0,5-0}{15-0} = \dfrac{0,5}{15} = \dfrac{1}{30}$.

2. $E(T) = \dfrac{0+15}{2} = 7,5$. Le temps moyen d'attente est de 7 minutes et 30 secondes.