Correction des exercices 38,47 p184

Ex 38 p184

1. f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1]$ si et seulement si :

   - f est continue sur $[0;1]$. C'est le cas, toutes fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $[0;1]$.
   - $f(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$.
   - $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

   Montrons que f vérifie ces conditions :

   - $$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ 5x^4 &> 0 \\ x^4 &> 0 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

     $f(x) \geqslant 0$ sur $[0;1]$.
   - $$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 5x^4\,dx \\ &= \left[5\times\frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\ &= \left[x^5\right]_0^1 \\ &= 1^5 - 0^5 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Donc f est une fonction de densité de probabilité sur $[0;1]$.

2. a)

$$\begin{aligned} P(X<\frac{1}{2}) = P(X<0,5) &= \int_0^{0,5} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{0,5} 5x^4 dx \\ &= \left[x^5\right]_0^{0,5} \\ &= 0,5^5 - 0^5 \\ &= 0,03125 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}P(X > 0,1) &= \int_{0,1}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{0,1}^{1} 5x^4\,dx \\ &= \left[x^5\right]_{0,1}^{1} \\ &= 1^5 - 0,1^5 \\ &= 0,99999\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}P(0,2 < X \leqslant 0,8) &= \int_{0,2}^{0,8} f(x)\,dx \\ &= \int_{0,2}^{0,8} 5x^4\,dx \\ &= \left[x^5\right]_{0,2}^{0,8} \\ &= 0,8^5 - 0,2^5 \\ &= 0,32736\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{0}^{1} xf(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} x5x^4\,dx \\ &= \int_{0}^{1} 5x^5\,dx \\ &= \left[5 \times \frac{x^6}{6}\right]_{0}^{1} \\ &= 5 \times \frac{1^6}{6} - 5 \times \frac{0^6}{6} \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ex 47p184

1. La fonction de densité de probabilité de la loi X est la fonction f définie sur $[12; 20]$ telle que :

$$f(x) = \frac{1}{20-12} = \frac{1}{8}$$

2. a) $P(X < 15) = \dfrac{15-12}{20-12} = \dfrac{3}{8}$
   b) $P(X > 17) = 1 - P(X < 17) = 1 - \dfrac{17-12}{20-12} = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$
   c) $P(14 < X < 19) = P(X < 19) - P(X < 14) = \dfrac{19-12}{20-12} - \dfrac{14-12}{20-12} = \dfrac{7}{8} - \dfrac{2}{8} = \dfrac{5}{8}$

d) $P(X < 14,8) = \frac{14,8 - 12}{20 - 12} = \frac{2,8}{8} = \frac{28}{80} = \frac{7}{20}$

3.

$$\begin{aligned}
P(X < k) &= 0,25 \\
\frac{k - 12}{20 - 12} &= 0,25 \\
\frac{k - 12}{8} &= 0,25 \\
k - 12 &= 0,25 \times 8 \\
k - 12 &= 2 \\
k &= 2 + 12 \\
k &= 14
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
P(X > t) &= 0,42 \\
1 - P(X < t) &= 0,42 \\
-P(X < t) &= 0,42 - 1 \\
-P(X < t) &= -0,58 \\
P(X < t) &= 0,58 \\
\frac{t - 12}{20 - 12} &= 0,58 \\
\frac{t - 12}{8} &= 0,58 \\
t - 12 &= 0,58 \times 8 \\
t - 12 &= 4,64 \\
t &= 4,64 + 12 \\
t &= 16,64
\end{aligned}$$

5. $E(X) = \frac{12 + 20}{2} = \frac{32}{2} = 16$