Correction des exercices 86,87 p221

Exercice 86 p221

1. Dans cette population la proportion de femmes est égale à 0,54 (1-0,46).

   - $p = 0,54$
   - $n = 460$
   - $f = \dfrac{260}{460} = \dfrac{13}{23} \approx 0,565$

   - $n = 460$, donc $n \geqslant 30$.
   - $np = 460 \times 0,54 = 248,4$, donc $np \geqslant 5$.
   - $n(1-p) = 460 \times (1-0,54) = 460 \times 0,46 = 211,6$, donc $n(1-p) \geqslant 5$.

   Les conditions sont vérifiées. On peut construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,54 - 1,96\frac{\sqrt{0,54(1-0,54)}}{\sqrt{460}}; 0,54 + 1,96\frac{\sqrt{0,54(1-0,54)}}{\sqrt{460}}\right] \\ &\approx [0,494; 0,586] \end{aligned}$$

2. $f \in I$. On peut estimer la proportion de femmes de l'échantillon est représentatif de la population avec un risque d'erreur de 5%.

3. Dans cette population la proportion de personnes âgées de plus de 60 ans est égale à 0,2 (1-0,46).

   - $p = 0,2$
   - $n = 460$
   - $f = \dfrac{108}{460} = \dfrac{27}{115} \approx 0,235$

   - $n = 460$, donc $n \geqslant 30$.
   - $np = 460 \times 0,2 = 92$, donc $np \geqslant 5$.
   - $n(1-p) = 460 \times (1-0,2) = 460 \times 0,8 = 368$, donc $n(1-p) \geqslant 5$.

   Les conditions sont vérifiées. On peut construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$\begin{aligned} I' &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[0,2 - 1,96\frac{\sqrt{0,2(1-0,2)}}{\sqrt{460}}; 0,2 + 1,96\frac{\sqrt{0,2(1-0,2)}}{\sqrt{460}}\right] \\ &\approx [0,163; 0,237] \end{aligned}$$

4. $f \in I'$. On peut estimer la proportion de personnes âgées de plus de 60 ans de l'échantillon est représentatif de la population avec un risque d'erreur de 5%.

5. On peut estimer que l'échantillon est représentatif de la population.

6. - $n = 460$
   - $f = 0,295$

   - $n = 460$, donc $n \geqslant 30$.
   - $nf = 460 \times 0,295 = 135,7$, donc $nf \geqslant 5$.
   - $n(1-f) = 460 \times (1 - 0,295) = 460 \times 0,705 = 324,3$, donc $n(1-f) \geqslant 5$.

   Les conditions sont vérifiées. On peut construire l'intervalle de confiance au seuil de 95%.

$$
\begin{aligned}
I &= \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[0,295 - \frac{1}{\sqrt{460}}; 0,295 + \frac{1}{\sqrt{460}}\right] \\
&\approx [0,248; 0,342]
\end{aligned}
$$

   On peut estimer qu'il y a entre 24,8% et 34,2% d'individus en surpoids dans cette population avec un risque d'erreur de 5%.

Exercice 87 p221

1. a) X suit une loi binomiale de paramètre $n = 500$; $p = 0,15$.
   b) $E(X) = np = 500 \times 0,15 = 75$.

2. a) $P(X > 200) = 1 - P(X \leqslant 200) = 1 - 1 = 0$
   b) $P(X < 10) = P(X \leqslant 9) \approx 4,742 \times 10^{-24}$
   c) $500 \times 0,10 = 50$; $500 \times 0,2 = 100$
   $P(50 \leqslant X \leqslant 100) = P(X \leqslant 100) - P(X \leqslant 49) \approx 0,999$

3. - $n = 500$
   - $p = 0,15$
   - $f = \dfrac{45}{500} = 0,09$

   - $n = 500$, donc $n \geqslant 30$.
   - $np = 500 \times 0,15 = 75$, donc $np \geqslant 5$.
   - $n(1-p) = 500 \times (1 - 0,15) = 500 \times 0,85 = 425$, donc $n(1-p) \geqslant 5$.

   Les conditions sont vérifiées. On peut construire l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

$$
\begin{aligned}
I' &= \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\
&= \left[0,15 - 1,96\frac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{500}} ; 0,15 + 1,96\frac{\sqrt{0,15(1-0,15)}}{\sqrt{500}}\right] \\
&\approx [0,119 ; 0,181]
\end{aligned}
$$

$f \notin I$. On rejette l'hypothèse avec un risque de 5% d'erreur.

4.

$$
\begin{aligned}
\left(p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) - \left(p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) &< 0,02 \\
1,96\frac{2 \times \sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &< 0,02 \\
\frac{1}{\sqrt{n}} &< \frac{0,02}{1,96 \times 2 \times \sqrt{p(1-p)}} \\
\sqrt{n} &> \frac{1,96 \times 2 \times \sqrt{p(1-p)}}{0,02} \\
(\sqrt{n})^2 &> \left(\frac{1,96 \times 2 \times \sqrt{p(1-p)}}{0,02}\right)^2 \\
n &> \left(\frac{1,96 \times 2 \times \sqrt{p(1-p)}}{0,02}\right)^2 \\
n &> \left(\frac{1,96 \times 2 \times \sqrt{0,15(1-0,15)}}{0,02}\right)^2 \\
n &> 4898,04
\end{aligned}
$$

La taille de l'échantillon doit être égale à 4899 pour qu'il ait une amplitude d'au plus 0,02.