13 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I par les expressions suivantes.

1. $f(x)=5x^6-2x^3+3x^2+7$; $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=-2x^8+7x^4+x^3$; $I=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=x^7+2x^6-5x^2-1$; $I=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\frac{3}{x^7}+\frac{1}{x^2}$; $I=]0\,;+\infty[$.
5. $f(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{7}{x^6}$; $I=]-\infty\,;0[$.
6. $f(x)=\frac{-5}{x^5}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^9}$; $I=]0\,;+\infty[$.

Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.

La fonction f	de primitives F	continue sur
$f(x)=k,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=ln(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{ax+b},\ a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

1) $F(x)=\frac{5}{7}x^7-\frac{2}{4}x^4+\frac{3}{3}x^3+7x$

$=\frac{5}{7}x^7-\frac{1}{2}x^4+x^3+7x$

2) $F(x)=-\frac{2}{9}x^9+\frac{7}{5}x^5+\frac{x^4}{4}$

3) $F(x)=\frac{x^8}{8}+\frac{2}{7}x^7-\frac{5}{3}x^3-x$

13 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I par les expressions suivantes.

1. $f(x)=5x^6-2x^3+3x^2+7$; $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=-2x^8+7x^4+x^3$; $I=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=x^7+2x^6-5x^2-1$; $I=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\frac{3}{x^7}+\frac{1}{x^2}$; $I=]0\,;+\infty[$.
5. $f(x)=\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{7}{x^6}$; $I=]-\infty\,;0[$.
6. $f(x)=\frac{-5}{x^5}-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^9}$; $I=]0\,;+\infty[$.

Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.

La fonction f	de primitives F	continue sur
$f(x)=k,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=ln(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{ax+b},\ a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

4) $f(x)=3x^{-7}+x^{-2}$

$$F(x)=3\,\frac{x^{-6}}{-6}+\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2}x^{-6}-x^{-1}$$

$$=-\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{x}$$

5) $f(x)=3x^{-3}-x^{-4}+7x^{-6}$

$$F(x)=3\,\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{-3}}{-3}+7\,\frac{x^{-5}}{-5}$$

$$=-\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{7}{5}x^{-5}$$

13 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I par les expressions suivantes.

1. $f(x)=5x^6-2x^3+3x^2+7$; $I=\mathbb{R}$.
2. $f(x)=-2x^8+7x^4+x^3$; $I=\mathbb{R}$.
3. $f(x)=x^7+2x^6-5x^2-1$; $I=\mathbb{R}$.
4. $f(x)=\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{1}{x^2}$; $I=]0\,;+\infty[$.
5. $f(x)=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{7}{x^6}$; $I=]-\infty\,;0[$.
6. $f(x)=\dfrac{-5}{x^5}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^9}$; $I=]0\,;+\infty[$.

Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.

La fonction f	de primitives F	continue sur
$f(x)=k,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=ln(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{ax+b},\ a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}$	$F(x)=\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$$= -\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{1}{3}x^{-3}-\frac{7}{5}x^{-5}$$

$$= -\frac{3}{2\cdot x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{7}{5x^5}$$

6) $f(x) = -5x^{-5}-4x^{-2}+x^{-9}$

$$F(x) = -5\,\frac{x^{-4}}{-4}-4\,\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-8}}{-8}$$

$$= \frac{5}{4}x^{-4}+4x^{-1}-\frac{1}{8}x^{-8}$$

$$= \frac{5}{4x^4}+\frac{4}{x}-\frac{1}{8x^8}$$

14 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I par les expressions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2(x^3+2)^4$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{-5}{(1-5x)^2}$; $I = \left]-\infty ; \dfrac{1}{5}\right[$.
3. $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.
5. $f(x) = 3xe^{-x^2}$; $I = \mathbb{R}$.

La fonction	de primitives	condition
kf	$kF+C, C\in\mathbb{R}$	
$f+g$	$F+G+C, C\in\mathbb{R}$	
$u'u^n, n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C, C\in\mathbb{R}$	I si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$nu'u^{n-1}, n\in\mathbb{Z}\{0\}$	$u^n+C, C\in\mathbb{R}$	si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C, C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ pour tout x
$\dfrac{u'}{u}$,	$ln(\|u\|)+C, C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ ou $u(x)<0$ pour tout $x\in I$
$u'e^u$	$e^u+C, C\in\mathbb{R}$	I

1) $F(x) = \dfrac{(x^3+2)^5}{5}$

2) $f(x) = -5(1-5x)^{-2}$

$F(x) = \dfrac{(1-5x)^{-2+1}}{-2+1} = \dfrac{(1-5x)^{-1}}{-1}$

$= -(1-5x)^{-1} = -\dfrac{1}{1-5x}$

14 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer une primitive F de la fonction f définie sur l'intervalle I par les expressions suivantes.

1. $f(x) = 3x^2(x^3+2)^4$; $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{-5}{(1-5x)^2}$; $I = \left]-\infty ; \frac{1}{5}\right[$.
3. $f(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$; $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.
5. $f(x) = 3xe^{-x^2}$; $I = \mathbb{R}$.

La fonction	de primitives	condition
kf	$kF+C, C\in\mathbb{R}$	
$f+g$	$F+G+C, C\in\mathbb{R}$	
$u'u^n, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+C, C\in\mathbb{R}$	I si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$nu'u^{n-1}, n\in\mathbb{Z}\{0\}$	$u^n+C, C\in\mathbb{R}$	si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C, C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ pour tout x
$\frac{u'}{u}$,	$ln(\vert u\vert)+C, C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ ou $u(x)<0$ pour tout $x\in I$
$u'e^u$	$e^u+C, C\in\mathbb{R}$	I

3) $F(x) = 2\sqrt{x^2+2x+2}$

4) $F(x) = e^{\frac{1}{x}}$

5) $F(x) = -\dfrac{3}{2}e^{-x^2}$

15 On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -2(x^2 - x + 3)e^{-2x}$ et $F(x) = (x^2 + 3)e^{-2x}$.

• Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^2 + 3$

$u'(x) = 2x$

$v(x) = e^{-2x}$

$v'(x) = -2e^{-2x}$

$F'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

$= 2x\,e^{-2x} + (x^2+3) \times (-2e^{-2x})$

$= -x \times -2e^{-2x} + -2e^{-2x} \times (x^2 + 3)$

$= -2e^{-2x}(-x + x^2 + 3)$

$= -2e^{-2x}(x^2 - x + 3)$

$= -2(x^2 - x + 3)e^{-2x}$

$= f(x)$. Donc F est une primitive de f

18 **1.** On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=3x-\frac{1}{x^2}.$$

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=e^{3x}+5e^{-\frac{x}{2}}. = e^{3}+5e^{-\frac{1}{2}x}$$

Déterminer la primitive G de la fonction g qui prend la valeur 4 en 0.

3. On considère la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Déterminer la primitive H de la fonction h qui s'annule en 2.

Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.

La fonction f	de primitives F	continue sur
$f(x)=k,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=ln(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{ax+b},\ a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}$	$F(x)=\dfrac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C,\ C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ pour tout x

1) $F(x)=\frac{3}{2}x^2-\left(-\frac{1}{x}\right)+C$

$=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{x}+C$, avec $C\in\mathbb{R}$

2) $G(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+5\times\frac{1}{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}+C$

$=\frac{1}{3}e^{3x}-10e^{-\frac{1}{2}x}+C$

18 **1.** On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=3x-\frac{1}{x^2}.$$

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\mathrm{e}^{3x}+5\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Déterminer la primitive G de la fonction g qui prend la valeur 4 en 0.

3. On considère la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Déterminer la primitive H de la fonction h qui s'annule en 2.

Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.

La fonction f	de primitives F	continue sur
$f(x)=k,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=ln(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{ax+b},\ a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}+C,\ C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ pour tout x

$= \frac{1}{3}e^{3x} - 10\, e^{-\frac{1}{2}x} + C$;

C un réel tel que $G(0)=4$

$G(0)=4$

$\frac{1}{3}e^{3\times 0} - 10\, e^{-\frac{1}{2}\times 0} + C = 4$

$\frac{1}{3} - 10 + C = 4$

$C = 4 + 10 - \frac{1}{3} = 14 - \frac{1}{3} = \frac{42}{3} - \frac{1}{3} = \frac{41}{3}$

18 1. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=3x-\frac{1}{x^2}.$$

Déterminer toutes les primitives de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x)=\mathrm{e}^{3x}+5\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

Déterminer la primitive G de la fonction g qui prend la valeur 4 en 0.

3. On considère la fonction h définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Déterminer la primitive H de la fonction h qui s'annule en 2.

Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.

La fonction f	de primitives F	continue sur
$f(x)=k,\ a\in\mathbb{R}$	$F(x)=kx+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n,\ n\in\mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=ln(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=e^{ax+b},\ a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}$	$F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C,\ C\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{2u'}{2\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+C,\ C\in\mathbb{R}$	I si $u(x)>0$ pour tout x

Donc $G(x)=\frac{1}{3}e^{3x}-10e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{41}{3}$

3) $H(x)=\sqrt{x+1}+C$

avec le réel tel que $H(2)=0$

$H(2)=0$

$\sqrt{2+1}+C=0$

$\sqrt{3}+C=0$

$C=-\sqrt{3}$

Donc

$H(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{3}$