# Chapitre 7 : Équations différentielles

## 1 Primitives d'une fonction continue

**Définition 1** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$, une fonction $F$ définie sur $I$ dont sa dérivée est égale à $f$.

Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$

**Théorème 1** Toute fonction continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$.

**Propriété 1** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$.
1. Si $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle $I$ alors toutes les primitives de $f$ sont les fonctions $G$ définies sur $I$ telles que $G = F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Soient $x_0 \in I$ et $y_0$ un réel ; il existe une unique primitive de $f$ qui prend en $x_0$ la valeur $y_0$. (i.e $F(x_0) = y_0$)

**Propriété 2 — Primitives de fonctions usuelles.**

| La fonction $f$ | de primitives $F$ | sur l'intervalle |
|---|---|---|
| $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ | $F(x) = kx + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ | $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant 2$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ | $F(x) = -\dfrac{1}{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $F(x) = 2\sqrt{x} + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $F(x) = ln(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $]0; +\infty[$ |
| $f(x) = e^x$ | $F(x) = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f(x) = e^{ax+b}$, $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}$ | $F(x) = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + C,\ C \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |

**Propriété 3 — Primitives d'opération de fonctions.** On considère :
- $f$ fonction continue sur un intervalle $I$ qui admet des primitives de la forme $F + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- $g$ fonction continue sur un intervalle $I$ qui admet des primitives de la forme $G + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
- Soit $u$ une fonction continue sur un intervalle $I$, dérivable sur $I$ de dérivée $u'$.
- Soit $k \in \mathbb{R}$.

Alors :

| La fonction | de primitives | condition |
|---|---|---|
| $kf$ | $kF+C, C\in\mathbb{R}$ | pour tout $x\in I$ |
| $f+g$ | $F+G+C, C\in\mathbb{R}$ | pour tout $x\in I$ |
| $u'u^n$, $n\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C, C\in\mathbb{R}$ | $I$ si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n\leqslant 2$ |
| $2u'u,$ | $u^2+C, C\in\mathbb{R}$ | pour tout $x\in I$ |
| $\dfrac{u'}{u^2}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}+C, C\in\mathbb{R}$ | $u(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$ |
| $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $\sqrt{u}+C, C\in\mathbb{R}$ | $I$ si $u(x)>0$ pour tout $x\in I$ |
| $\dfrac{u'}{u}$ | $ln(\|u\|)+C, C\in\mathbb{R}$ | $I$ si $u(x)>0$ ou $u(x)<0$ pour tout $x\in I$ |
| $u'e^u$ | $e^u+C, C\in\mathbb{R}$ | pour tout $x\in I$ |

■ **Exemple 1** Donner les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x$ ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
2. $f(x)=2x$ ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
3. $f(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{x}$ ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
4. $f(x)=2xe^{-x^2}$ ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
5. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2}$ ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................
   ........................................................................

■

## 2 Équations différentielles

**Définition 2** Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. L'égalité qui forme l'équation se présente comme une relation entre la fonction inconnue, une ou plusieurs de ses dérivées successives et potentiellement d'autres fractions.

De manière général, l'inconnue est noté $y$ représentant la fonction $f$, $y'$ la fonction $f'$, $y''$ la fonction $f''$, etc.

■ **Exemple 2** $y' = 2y + 5$ ; $y' = 2x$ ; $y' - 4y = 2x + 3$ sont des équations différentielles. ■

**Propriété 4** Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui vérifient l'équation.

R Les primitives d'une fonction $f$ sont les solutions de l'équation différentielle $y' = f$.

■ **Exemple 3** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2x + 1$

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

■

■ **Exemple 4**

- Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Vérifier que $f$ est une solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 6x - 2$

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

- Soit $g$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x$. Vérifier que $g$ est une solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' - y = e^x$

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

  ..........................................................................................

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

■

# 3 Équations différentielles $y' = ay + b$

## 3.1 Équations différentielle de la forme $y' = ay$

**Théorème 2** Soit $a \in \mathbb{R}$, les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $f : x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

*Démonstration.* Soient $C \in \mathbb{R}$ et $(E)$ l'équation différentielle telle que $y' = ay$, avec $a \in \mathbb{R}^*$

- Montrons que les fonctions $f(x) = Ce^{ax}$ sont solutions de $(E)$
  $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $f'(x) = Cae^{ax} = aCe^{ax}$. On constate que $f(x) = af'(x)$. Les fonctions $f$ sont bien solution de $(E)$.
- Montrons que si les fonctions $g$ sont solutions $(E)$, alors $g = f$.
  Soit $g$ une fonction solution de $(E)$.
  La fonction $x \mapsto e^{ax}$ est une fonction qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ quelque soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $h(x) = e^{-ax}g(x)$.
  $h$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
  $h'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}g'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x))$.
  Or $g$ est solution de $(E)$. Par conséquent, $g'(x) = ag(x)$. On obtient donc
  $h'(x) = e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) = 0$
  Ainsi $h'(x) = 0$, la fonction $h$ est constante. Il existe donc un réel $C$ tel que $h(x) = C$.
  Comme

$$\begin{aligned} h(x) &= e^{-ax}g(x) \\ C &= e^{-ax}g(x) \\ g(x) &= \frac{C}{e^{-ax}} \\ g(x) &= Ce^{ax} \\ g(x) &= f(x) \end{aligned}$$

- Conclusion
  On peut conclure que les solutions de l'équation différentielle de $(E)$ sont les fonctions $f$ telle que $f(x) = Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.

■ **Exemple 5** Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

■

**Théorème 3** Soit $a \in \mathbb{R}$, l'unique fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $y' = ay$ vérifiant $f(x_0) = k$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$ données est définie par :
$f(x) = ke^{a(x-x_0)}$

*Démonstration.* $f(x_0) = k$ et les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante. $f$ est donc une solution particulière de ces fonctions.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= k \\ Ce^{ax_0} &= k \\ C &= \frac{k}{e^{ax_0}} \\ C &= ke^{-ax_0} \end{aligned}$$

On remplace $C$ par sa valeur "particulière" dans l'expression des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

On obtient : $f(x) = ke^{-ax_0}e^{ax} = ke^{-ax_0+ax} = ke^{a(-x_0+x)} = ke^{a(x-x_0)}$

■ **Exemple 6** Déterminer la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(5) = 2$ et étant solution de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

■

## 3.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

**Théorème 4** Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $f$ de la forme $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec $C \in \mathbb{R}^*$ une constante.

*Démonstration.*

Flash le QR-Code pour lire la démonstration.

**Théorème 5** Soient $x_0$ et $k$ des réels données. Il existe une fonction $f$ qui est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition que $f(x_0) = k$.

**Exemple 7**

- Déterminer les fonctions $f$ définies sur $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 2y + 5$

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

- Déterminer la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(5) = 2$ et étant solution de l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 2y + 5$

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

  ..................................................................................

■

**Défi :**

Soient $x_0$ et $k$ des réels données et $f$ l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ vérifiant la condition que $f(x_0) = k$. Montrer que $f(x) = \left(k + \frac{b}{a}\right) e^{x - x_0} - \frac{b}{a}$.