Nom(s)/Prénom(s) : ....

Le sujet est à restituer avec la copie.

Faire le sujet de spécialité sur une autre copie, en indiquant le nom du professeur de spécialité sur la copie.

Exercice 1 (......../4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$ par $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-3x}$.
   L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$:

   a. 0 solution **b.** 1 solution
   c. 2 solutions **d.** 3 solutions ou plus

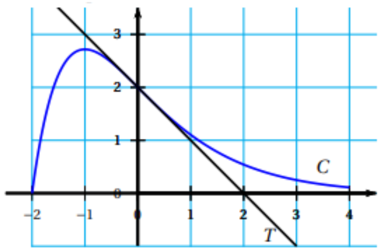
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (5x-3)\mathrm{e}^{-x}$. Alors :

   a. $g'(x) = e^{-x}(-5x+8)$ **b.** $g'(x) = e^{-x}(5x+2)$
   c. $g'(x) = e^{-x}(5x-8)$ **d.** $g'(x) = e^{-x}(-5x+2)$

3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $n = 50$ et $p = 0,32$. Alors $P(X > 20)$ arrondie au millième est égale à :

   a. $P(X > 20) \approx 0,912$ **b.** $P(X > 20) \approx 0,088$
   c. $P(X > 20) \approx 0,050$ **d.** $P(X > 20) \approx 0,950$

4. La courbe représentative C d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ est donnée ci-contre. La tangente T à la courbe au point d'abscisse 0 traverse la courbe en ce point.

   La fonction f est convexe sur l'intervalle :

   a. $[-1; 4]$ **b.** $[-2; 0]$
   c. $[-2; 1]$ **d.** $[0; 4]$

Solution :

1. **La réponse b.**
   Il suffit de résoudre l'équation produit :

$$f(x) = 0$$
$$(2x-3)e^{-3x} = 0$$

$$2x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad e^{-3x} = 0$$
$$x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad \text{pas de solution}$$

2. **La réponse a.** Dérivons la fonction g.
   On pose $u(x) = 5x-3$, $u'(x) = 5$, $v(x) = e^{-x}$, $v'(x) = -e^{-x}$.

$$g'(x) = 5e^{-x} + (5x-3) \times (-e^{-x})$$
$$g'(x) = 5e^{-x} - e^{-x}(5x-3)$$
$$g'(x) = e^{-x}(5-(5x-3))$$
$$g'(x) = e^{-x}(5-5x+3)$$
$$g'(x) = e^{-x}(-5x+8)$$

3. **La réponse b.**
   $P(X > 20) = 1 - P(X \leqslant 20)$.
   On tape donc à la calculatrice 1-BinominalCD(20,50,0.32). On obtient comme résultat 0,08822136705.
4. **La réponse d.**
   La courbe C admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0 sur l'intervalle $[-2; 4]$. Les tangentes sont au dessous de la courbe C sur l'intervalle $[0; 4]$. La fonction est donc convexe sur $[0; 4]$.

Exercice 2 (......../6 points)

On appelle fonction *satisfaction* toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction *satisfaction* atteint la valeur 100, on dit qu'il y a *saturation* .

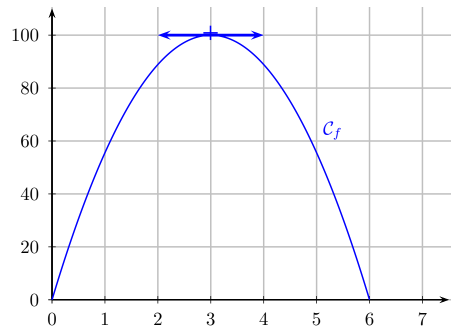
On définit aussi la fonction *envie* comme la fonction dérivée de la fonction *satisfaction* . On dira qu'il y a *souhait* lorsque la fonction *envie* est positive ou nulle et qu'il y a *rejet* lorsque la fonction *envie* est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction *satisfaction* différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction *satisfaction* f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).
Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.



1. Lire la durée de travail quotidien menant à *saturation*.
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a *rejet*.

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction *satisfaction* g est définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par $g(x) = 12,5x\mathrm{e}^{-0,125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,30]$,
$$g'(x) = (12,5 - 1{,}562\,5x)\mathrm{e}^{-0,125x+1}.$$
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Quelle durée de séjour correspond-elle à l'effet *saturation* ?

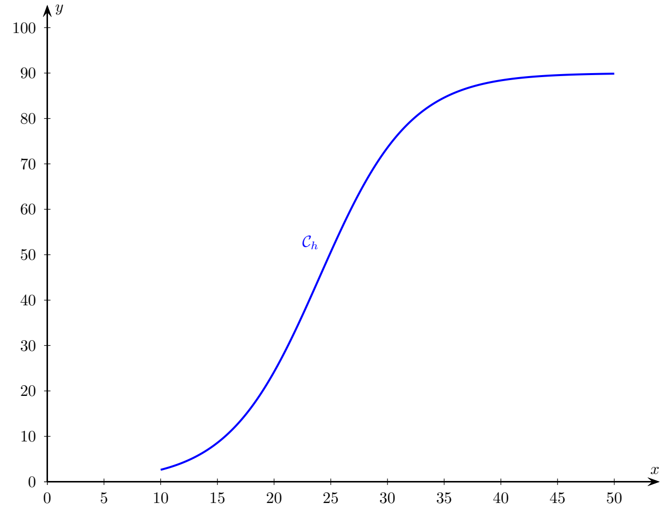
Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction *satisfaction* h, est définie sur l'intervalle $[10\,;\,50]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + \mathrm{e}^{-0,25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).

La courbe $\mathcal{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous:



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants:

1	`Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))!` $\dfrac{22,5\mathrm{e}^{-0,25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^2}$
2	`Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6)`^{2}`))!` $\dfrac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10\,;\,50]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1>0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10\,;\,50]$.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction *envie* décroît? Justifier.
   Arrondir au millier d'euros.

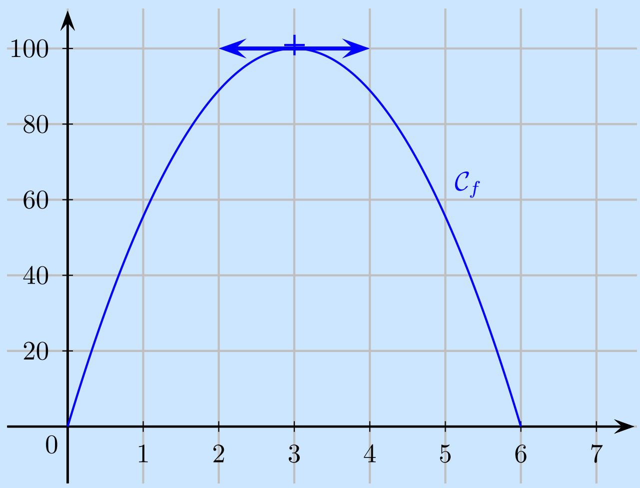
Solution :

On appelle fonction *satisfaction* toute fonction dérivable qui prend ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction *satisfaction* atteint la valeur 100, on dit qu'il y a *saturation* .

On définit aussi la fonction *envie* comme la fonction dérivée de la fonction *satisfaction* . On dira qu'il y a *souhait* lorsque la fonction *envie* est positive ou nulle et qu'il y a *rejet* lorsque la fonction *envie* est strictement négative.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction *satisfaction* f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



1. Il y a *saturation* au bout de 3 heures de travail.
2. Il y a *rejet* quand la fonction est décroissante, donc après 3 heures de travail.

Partie B

Le directeur d'une agence de trekking modélise la satisfaction de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction *satisfaction* g est définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par $g(x)=12,5x\mathrm{e}^{-0,125x+1}$ (x est exprimé en jour).

1. Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,30]$:

   $g'(x) = 12,5 \times \mathrm{e}^{-0,125x+1} + 12,5x \times (-0,125)\mathrm{e}^{-0,125x+1} = (12,5 - 1{,}562\,5x)\mathrm{e}^{-0,125x+1}$.

2. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,125x+1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $12,5 - 1{,}562\,5x$.

   $12,5 - 1{,}562\,5x > 0 \iff 12,5 > 1{,}562\,5x \iff \dfrac{12,5}{1{,}562\,5} > x \iff x < 8$

   $g(0) = 0$, $g(8) = 100$ et $g(30) \approx 24$

   On établit le tableau des variations de la fonction g sur $[0\,;\,30]$:

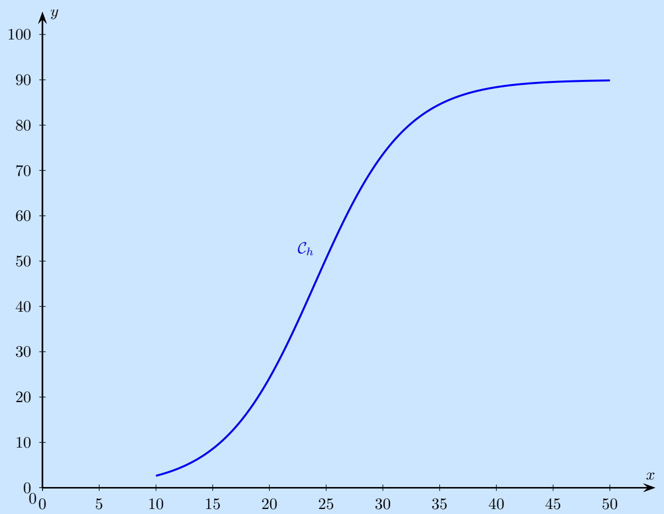
x	0		8		30
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	100	↘	$f(30)$

3. D'après le tableau de variations, l'effet *saturation* apparaît au bout d'un séjour de 8 jours.

Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction *satisfaction* h, est définie sur l'intervalle $[10\,;\,50]$ par $h(x) = \dfrac{90}{1 + \mathrm{e}^{-0,25x+6}}$ (x est exprimé en millier d'euros).

La courbe $\mathcal{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous:



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants:

1	`Dériver(90/(1 + exp(-0.25 * x +6)))` $\dfrac{22,5\mathrm{e}^{-0,25x+6}}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^2}$
2	`Dériver(22.5 * exp(-0,25 x + 6)/(1 + exp(-0,25 * x + 6))š` $\dfrac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}$

1. D'après le logiciel de calcul formel, $h''(x) = \dfrac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1)}{(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6})^3}$.

2. On résout dans l'intervalle $[10\,;\,50]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6}-1>0$:

$$\begin{aligned} e^{-0,25x+6}-1>0 &\iff e^{-0,25x+6}>1 \iff -0,25x+6>0\\ &\iff 6>0,25x \iff \frac{6}{0,25}>x\\ &\iff 24>x \end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $[10\,;\,50]$, l'inéquation $e^{-0,25x+6}-1>0$ a pour solution l'intervalle $[10\,;\,24[$.

3. La fonction h est convexe sur les intervalles sur lesquels sa dérivée est croissante, c'est-à-dire quand sa dérivée seconde est positive.

   $h''(x)=\dfrac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6}-1)}{(1+e^{-0,25x+6})^3}$

   Or pour tout X, $e^X>0$ donc, pour tout x, $e^{-0,25x+6}>0$; on en déduit que $\left(1+e^{-0,25x+6}\right)^3>0$ et que $5,625e^{-0,25x+6}>0$, et donc que $h''(x)$ est du signe de $e^{-0,25x+6}-1$.

   D'après la question précédente, on peut dire que:

   - $h''(x)>0$ sur $[10\,;\,24[$ donc la fonction h est convexe sur $[10\,;\,24[$;
   - $h''(x)<0$ sur $]24\,;\,50]$ donc la fonction h est concave sur $]24\,;\,50]$.

4. La fonction *envie* décroit quand h' décroit donc quand h'' devient négative, soit à partir de $x=24$, ce qui correspond à un salaire annuel de 24 000 euros.

Exercice 3 (......../5 points)

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays. Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6% des personnes qui étaient favorables ne le sont plus;
- 4% des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'évènement "la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président" de probabilité p_0 (c'est-à-dire $P(F_0)=p_0$) et $\overline{F_0}$ son évènement contraire;
- F_1 l'évènement "la personne interrogée le 1er mois a une opinion favorable" de probabilité p_1 (c'est-à-dire $P(F_1)=p_1$) et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

Sur l'ensemble de l'exercice, on considère que $p_0=0,55$.

1. Compléter l'arbre pondéré de l'**annexe A** (disponible en fin d'exercice) traduisant la situation sur la période élection- 1er mois.
2. Calculer p_1.
3. On donne et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement "la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable" et p_n sa probabilité (c'est-à-dire $P(F_n)=p_n$).
   a) Compléter l'arbre pondéré de l'**annexe B** (disponible en fin d'exercice) traduisant la situation sur la période élection- n-ième mois.
   b) Avec l'aide de l'arbre pondéré de la question 3-a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $p_{n+1}=0,9p_n+0,04$.

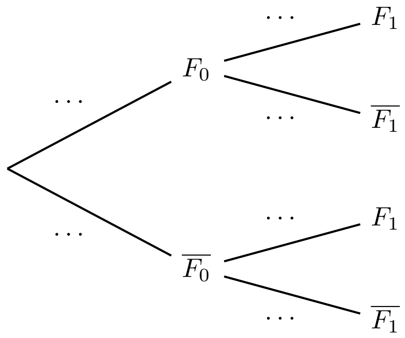
On considère pour la suite de l'exercice, la suite (p_n) définie pour tout entier n par :
$p_{n+1}=0,9p_n+0,04$ avec $p_0=0,55$.

4. On considère l'algorithme ci-contre :
   a) Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur N=1.
   b) Donner le rôle de cet algorithme.

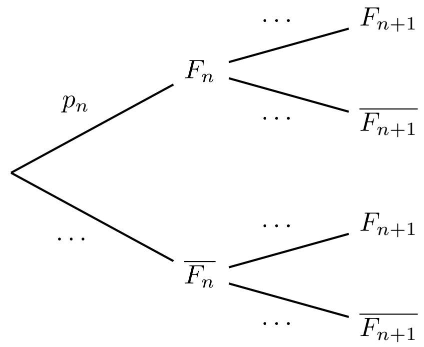
ligne 1	Saisir N
ligne 2	P ← 0,55
ligne 3	Pour I allant de 1 à N faire
ligne 4	P← 0,9×P+0,04
ligne 5	Fin Pour
ligne 6	Afficher P

5. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,4$.
   a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0.
   b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

Annexe A

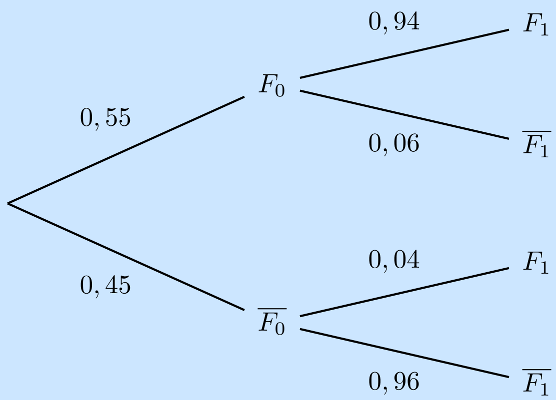


Annexe B



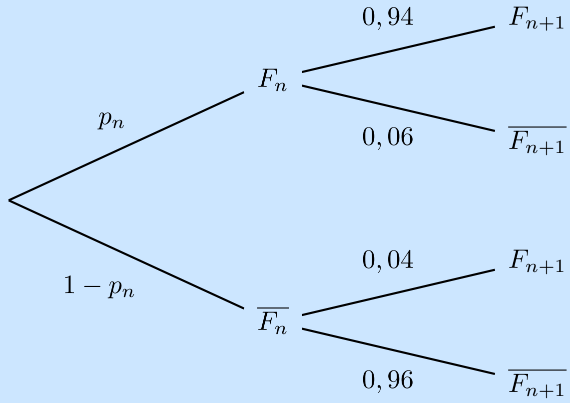
Solution :

1.



2. $p_1 = P(F_1)$, d'après la formule des probabilités totales :
   $P(F_1) = P(F_0 \cap F_1) + P(\overline{F_0} \cap F_1) = P(F_0) \times P_{F_0}(F_1) + P(\overline{F_0}) \times P_{\overline{F_0}}(F_1) = 0,55 \times 0,94 + 0,45 \times 0,04 = 0,535$
   Par conséquent $p_n = 0,535$.

3. a)



   b) $p_{n+1} = P(F_{n+1})$, d'après la formule des probabilités totales :
   $P(F_{n+1}) = P(F_n \cap F_{n+1}) + P(\overline{F_n} \cap F_{n+1}) = P(F_n) \times P_{F_n}(F_{n+1}) + P(\overline{F_n}) \times P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})$
   $= p_n \times 0,94 + (1 - p_n) \times 0,04 = 0,94p_n + 0,04 - 0,04p_n = 0,9p_n + 0,04.$
   Par conséquent $p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04$.

4. a) Lorsque l'utilisateur entre la valeur N=1, la boucle n'est exécutée qu'une fois d'où P prend la valeur : $0,9 \times 0,55 + 0,04 = 0,535$
   b) Cet algorithme permet d'obtenir la probabilité de l'évènement "la personne interrogée a une opinion favorable N mois après l'élection du président".

5. a) Comme $u_n = p_n - 0,4$, on en déduit que $p_n = u_n + 0,4$ et que $p_{n+1} = u_{n+1} + 0,4$.

$$\begin{array}{rl} \text{Or :} & p_{n+1} = 0,9p_n + 0,04 \\ \text{Ainsi :} & u_{n+1} + 0,4 = 0,9(u_n + 0,4) + 0,04 \\ & u_{n+1} + 0,4 = 0,9u_n + 0,9 \times 0,4 + 0,04 \\ & u_{n+1} + 0,4 = 0,9u_n + 0,36 + 0,04 \\ & u_{n+1} + 0,4 = 0,9u_n + 0,4 \\ & u_{n+1} + \cancel{0,4} = 0,9u_n + \cancel{0,4} \\ & u_{n+1} = 0,9u_n \end{array}$$

Comme $u_{n+1} = 0,9u_n$, on observe par identification que (u_n) est la forme $u_{n+1} = qu_n$, c'est-à-dire la forme récurrente d'une suite géométrique. Par conséquent (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $u_0 = p_0 - 0,4 = 0,55 - 0,4 = 0,15$.

b) • Comme (u_n) est une suite géométrique, sa forme explicite est de la forme $u_n = u_0q^n$. Ainsi la forme explicite de (u_n) est définie pour tout n entier naturel par : $u_n = 0,15 \times 0,9^n$.

• Comme $p_n = u_n + 0,4$ et que $u_n = 0,15 \times 0,9^n$, on en déduit la forme explicite de la suite (p_n) : $p_n = u_n + 0,4 = 0,15 \times 0,9^n + 0,4$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,15 \times 0,9^n + 0,4 = 0,15 \times \lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n + \lim\limits_{n\to+\infty} 0,4$

Or :

• $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, si $0 < q < 1$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,4 = 0,4$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,15 \times \lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n + \lim\limits_{n\to+\infty} 0,4 = 0,15 \times 0 + 0,4 = 0,4$.

On peut interpréter qu'au bout d'un certain nombre de mois après l'élection, la cote de popularité du président tendra vers 40%.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui ne suivent <u>PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ</u>.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. a) Calculer u_1 et u_2.
   b) Démontrer que (u_n) n'est pas une suite géométrique.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$. On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8.
   a) Déterminer la valeur de v_0.
   b) Déterminer la forme explicite de (v_n)
   c) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

On considère l'algorithme ci-contre :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que ....
ligne 4	$\quad n \leftarrow n+1$
ligne 5	$\quad u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	Fin Tant que

3. a) Recopier et compléter la ligne 3 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$.
   b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio.

   En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

- d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
- chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le n-ième mois qui suit le mois de juillet 2017.

b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4 420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.

c) Selon ce modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ?
Argumenter la réponse.

Solution :

Solution :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$.

1. a) $u_1 = 0,8u_0 + 18 = 0,8 \times 65 + 18 = 52 + 18 = 70$ et $u_2 = 0,8u_1 + 18 = 0,8 \times 70 + 18 = 56 + 18 = 74$.

   b) (u_n) est une suite géométrique si et seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$, avec $q \in \mathbb{R}$. Or, on remarque que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{70}{65} \approx 1,08$ et que $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{74}{70} \approx 1,06$, ce qui implique que $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$. Par conséquent le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'est pas constant.
   Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$; donc $u_n = v_n + 90$.

   a) $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$.

   b) La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -25$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0,8^n$.

   c) Or $u_n = v_n + 90$ et $v_n = -25 \times 0,8^n$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.

3. a) Pour que l'algorithme détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$, il faut le faire tourner tant que u_n est strictement inférieur à 85; la ligne 3 est donc:

ligne 3	Tant que $u < 85$

   b) En calculant à la calculatrice les termes successifs de la suite (u_n), on trouve (valeurs arrondies au dixième):

0	1	2	3	4	5	6	7	8
65	70	74	77,2	79,8	81,8	83,4	84,8	85,8

   La valeur de n à la fin de l'exécution de l'algorithme est donc 8.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 € par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.

   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

   - d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
   - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

   a) En juillet 2017, il y avait 65 particuliers qui avaient souscrit l'abonnement, ce qui correspond au terme de rang 0 de la suite (u_n).
   Chaque mois, 20 % des abonnements sont résiliés, donc il en reste 80 %.
   Prendre 80 %, c'est multiplier par $0,8$; il faudra donc multiplier par $0,8$.
   Comme 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement, il faudra ensuite ajouter 18.
   On passe d'un mois n au mois suivant $n+1$ en multipliant par $0,8$ puis en ajoutant 18 donc la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout n, par $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$ modélise le nombre d'abonnés au panier bio.

   b) Chaque abonnement coûte 52 € par mois; le recette mensuelle le mois n est donc en euro de $52u_n$.
   On cherche donc n pour que $52u_n$ dépasse 4 420 €. On résout l'inéquation:
   $52u_n > 4\,420 \iff u_n > 85 \iff n \geqslant 8$ (voir questions précédentes).
   La recette mensuelle dépassera 4 420 € à partir de $n = 8$.
   Sachant que $n = 0$ correspond au mois de juillet 2017, c'est donc à partir de mars 2018 que la recette mensuelle dépassera 4 420 €.

   c) La suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$; or $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.
   Pour tout n, $u_n = v_n + 90$ donc la suite (u_n) a pour limite 90.
   La recette étant de $52u_n$ pour le mois n, la recette mensuelle tend vers $52 \times 90 = 4\,680$ €.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui suivent <u>L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ</u>.

Solution :

Question préliminaire :

Il y a 10 arêtes, donc 10 questionnaires.

Partie A :

1. En respectant l'ordre alphabétique on a :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Il n'y a pas d'arête entre E et F : le graphe n'est pas complet.

3. a) Le graphe est connexe et seuls B et C ont des degrés impairs (5 et 3 respectivement) donc il existe une chaîne eulérienne. On ne peut pas parcourir le jardin et répondre à tous les questionnaires en partant de n'importe quel sommet.

   b) C est l'un des sommets d'ordre impair, donc la visite se terminera par l'autre sommet de degré impair soit B.

Partie B :

1. Soit γ le nombre chromatique de ce graphe ; le plus haut degré est égal à 5, donc $\gamma \leqslant 6$; de plus le sous-graphe $\{$A ; B ; C ;D$\}$ est complet, donc $\gamma \geqslant 4$.

   Conclusion : $4 \leqslant \gamma \leqslant 6$.

2. En rangeant les sommets par degrés décroissants on peut donner :

   la couleur rouge à B ;

   la couleur bleue à A et E ;

   la couleur jaune à D et F ;

   la couleur verte à C.

   On peut donc faire un coloriage à 4 couleurs : on a donc $\gamma = 4$.