Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

DS 3

Note

...../20

Exercice 1 (......../2 points)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $2^5 \times 2^{-7}$
2. $\dfrac{e^5}{e^8 \times e^3}$
3. $3^3 \times 2,5^3$
4. $(e^{2x+1})^2 \times e^2$

Solution :

1. $2^5 \times 2^{-7} = 2^{5-7} = 2^{-2}$
2. $\dfrac{e^5}{e^8 \times e^3} = \dfrac{e^5}{e^{8+3}} = \dfrac{e^5}{e^{11}} = e^{5-11} = e^{-6}$
3. $3^3 \times 2,5^3 = (7,5)^3$
4. $(e^{2x+1})^2 \times e^2 = e^{2(2x+1)} \times e^2 = e^{4x+2} \times e^2 = e^{4x+2+2} = e^{4x+4}$

Exercice 2 (......../3 points)

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $e^{2x+1} = e^{3x-4}$
2. $e^{2x+1} - 1 = 0$
3. $e^{2x+3} \leqslant e^{5x-1}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned} e^{2x+1} &= e^{3x-4} \\ 2x+1 &= 3x-4 \\ 2x-3x &= -4-1 \\ -x &= -5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} e^{2x+1} - 1 &= 0 \\ e^{2x+1} &= 1 \\ e^{2x+1} &= e^0 \\ 2x+1 &= 0 \\ 2x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

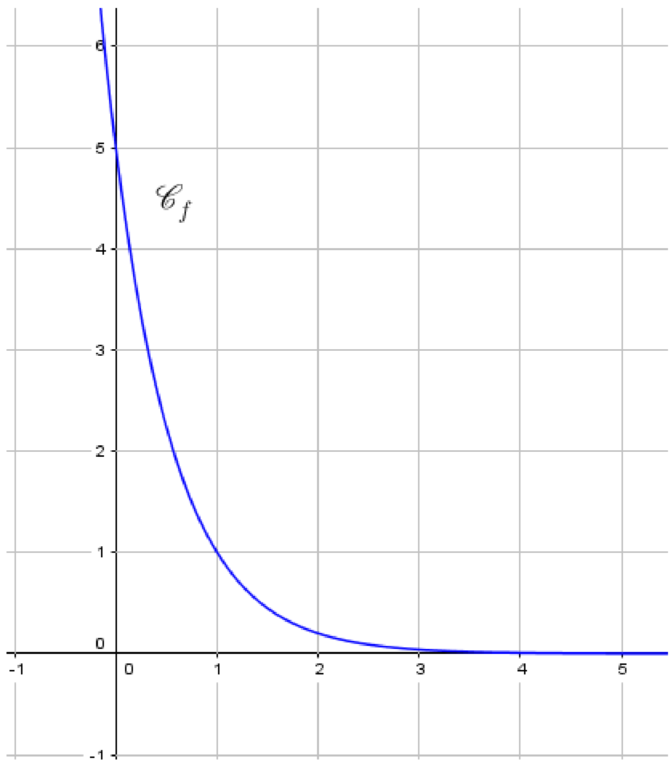
3.

$$\begin{aligned}
e^{2x+3} &\leqslant e^{5x-1} \\
2x+3 &\leqslant 5x-1 \\
2x-5x &\leqslant -1-3 \\
-3x &\leqslant -4 \\
x &\geqslant \frac{-4}{-3} \\
x &\geqslant \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$S = \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

Exercice 3 (......../3 points)

Soit f une fonction de la forme $f(x) = k \times q^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentée ci-dessous.



1. Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer l'expression de f.

Solution :

1. $f(0) = 5$; $f(1) = 1$.
2. Comme $f(x) = k \times q^x$ et que :

$$\begin{aligned}
f(0) &= 5 \\
k \times q^0 &= 5 \\
k &= 5
\end{aligned}$$

ainsi $f(x) = 5q^x$, et comme :

$$f(1) = 1$$
$$5q^1 = 1$$
$$q = \frac{1}{5}$$

On a donc $f(x) = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Exercice 4 (......../5 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (2x-7)e^x$.

1. a) Montrer que $f'(x) = e^x(2x-5)$.
   b) Dresser le tableau de signes de f'.
   c) En déduire les variations de f.
2. On considère que la dérivée seconde de f est égale à $f''(x) = e^x(2x-3)$.
   a) Dresser le tableau de signes de f''.
   b) En déduire la convexité de f.
   c) f admet-elle un point d'inflexion (justifier) ? Si oui, préciser ses coordonnées.

Solution :

1. a) On pose $u(x) = 2x-7$, $u'(x) = 2$, $v(x) = e^x$ et $v'(x)e^x$.
   Ainsi :
   $f'(x) = 2e^x + (2x-7)e^x = e^x(2+(2x-7)) = e^x(2x-5)$.
   b)

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$2x-5$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-2e^{\frac{5}{2}}$	↗	

   c)

2. a)

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$2x-3$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   b) Comme $f''(x) > 0$ sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$, f est convexe sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$.
   Comme $f''(x) > 0$ sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$, f est concave sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$.

c) Comme $f''(\frac{3}{2}) = 0$. f admet un point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{3}{2}; f(\frac{3}{2})\right)$, c'est à dire $\left(\frac{3}{2}; -4e^{\frac{3}{2}}\right)$.

Exercice 5 (......../7 points)

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires (CA) en milliers d'euros d'une entreprise, au début du mois de janvier.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x	0	1	2	3	4	5
CA (milliers €) y	55	58	64	85	105	112

Partie A :

1. Déterminer le taux d'évolution du chiffre d'affaires entre 2002 et 2005, exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité.
2. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen entre 2001 et 2006 est d'environ 15%.

Partie B :

Pour la suite, on considère que la fonction $f(x) = 55 \times 1,15^x$, définie et continue pour $x \in [0; 12]$, modélise une estimation de l'évolution du chiffre d'affaires de l'entreprise.

- x correspond à l'année;
- $f(x)$ correspond au chiffre d'affaires de l'entreprise exprimé en milliers d'euros.

1. Le service comptabilité de l'entreprise demande une estimation du chiffre d'affaires de l'entreprise au début du mois de juillet 2007. Quelle réponse peut-on apporter en exploitant ce modèle ? (résultat arrondi à la centaine d'euros)
2. a) Justifier que f est une fonction strictement croissante sur $[0; 12]$.
   b) Justifier que $f(x) = 155$ admet une unique solution α sur $[0; 12]$.
   c) Encadrer la valeur de α à 0,1 près.
   d) En se basant sur le modèle établi, à partir de quelle date (mois, année), peut-on estimer que le chiffre d'affaires de l'entreprise sera supérieur à 155 000 €
3. Calculer, pour tout $x \in [0; 11]$, $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$. Interpréter ce résultat.

Solution :

Partie A :

1. $t_e = \dfrac{105 - 58}{58} \approx 0,81$. Le taux d'évolution entre 2002 et 2005 du chiffre d'affaires est d'environ 81%.
2. $t_m = \sqrt[5]{\dfrac{112}{55}} - 1 \approx 0,152$. Le taux d'évolution annuel moyen entre 2001 et 2006 est d'environ 15%.

Partie B :

1. Le rang d'année 6,5 correspond au début du mois de Juillet 2007. $f(6,5) = 55 \times 1,15^{6,5} \approx 136,4$. On peut estimer le chiffre d'affaires de l'entreprise à 136 400 €.

2. a) $x \mapsto 1,15^x$ est une fonction exponentielle de base q, avec $q > 0$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Multiplier cette fonction par un nombre positif ne changera pas son sens de variation. Donc f est une fonction strictement croissante sur $[0;12]$.

   b) f est une fonction continue, strictement croissante sur $[0;12]$. Ses images varient de 55 à environ 294. Par conséquent, d'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 155$, admet une unique solution α telle que $f(\alpha) = 0$.

   c) A la calculatrice, on en déduit que $7,4 < \alpha < 7,5$.

   d) D'après les résultats précédents, on peut déduire que le chiffre d'affaires de l'entreprise sera supérieur à 155 000 € à partir du mois de juillet 2008.

3.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} &= \frac{55\times 1,15^{x+1} - 55\times 1,15^x}{55\times 1,15^x} \\
&= \frac{55\times 1,15^x(1,15-1)}{1,15^x} \\
&= \frac{\cancel{55\times 1,15^x}(1,15-1)}{\cancel{55\times 1,15^x}} \\
&= 1,15-1 \\
&= 0,15
\end{aligned}$$

Entre l'année x et l'année $x+1$, on peut estimer le chiffre d'affaires devrait augmenter de 15%.