Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 1

Note

...../20

Exercice 1 (......../4 points)

Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des quatre propositions est exacte.

Entourer sur la feuille la bonne réponse.

1. Soit (u_n) la suite définie telle que $u_{n+1} = 7u_n$ et de premier terme $u_0 = 2$, alors la forme explicite de la suite (u_n) est :
   (a) $u_n = 2 + 7n$
   (b) $u_n = 7 + 2n$
   (c) $u_n = 7 \times 2^n$
   (d) $u_n = 2 \times 7^n$
2. Soit (v_n) la suite définie telle que $v_n = 2 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ alors :
   (a) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$
   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
   (c) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$
   (d) $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{5}{6}$
3. Soit (w_n) une suite géométrique définie par $w_n = 5^n$. La somme des 10 premiers termes de la suite est égal à :
   (a) 488281
   (b) 2441406
   (c) 12207031
   (d) 61035156
4. Soit (c_n) une suite géométrique définie par $c_n = 800 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 100$. Le plus petit entier n vérifiant $c_n < 120$.
   (a) $n = 5$
   (b) $n = 6$
   (c) $n = 7$
   (d) $n = 8$

Solution :

1. Réponse (d) : $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times 7^n$
2. Réponse (a) : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2 \times \left(\dfrac{5}{5}\right) = 0$, car $q = \dfrac{5}{6}$ et $0 < q < 1$.
3. Réponse (b): $S_9 = w_0 = \dfrac{1 - q^{10}}{1 - q} = 1 \times \dfrac{1 - 5^{10}}{1 - 5} = 2441406$.
4. Réponse (b) : $c_5 = 125$, $c_6 = 112.5$ donc $n = 6$.

Exercice 2 (......../7 points)

Le 1er Janvier 2008, une ville A compte 50000 habitants. On admet que chaque année, sa population diminue de 1,5%. On désigne P_n sa population le 1er Janvier 2008+n. Ainsi $P_0 = 50000$

1. Calculer P_1, P_2, P_3 (arrondi à l'entier).
2. En justifiant, exprimer P_{n+1} en fonction P_n. Quel est la nature de cette suite ?
3. En justifiant, exprimer P_n en fonction de n.
4. Quel est le sens de variation de la suite P_n ? Justifier votre réponse.
5. A partir de quelle année la population aura t-elle diminuée de moitié. Justifier votre réponse.

Solution :

1. $P_1 = \left(1 - \frac{1.5}{100}\right) P_0 = 0,985 \times 50000 = 49250$; $P_2 = 0,985 \times P_1 = 0,985 \times 49250 \approx 48511$; $P_3 = 0,985 \times P_2 \approx 47784$.

   Remarque :

   - *P_3 calculer avec la valeur arrondi de P_2 : 47783,335*
   - *P_3 calculer avec la valeur exacte de P_2 : 47783,581*

2. Entre l'année n et l'année $n+1$, la population dinuminue de 1,5%. Comme la suite (P_n) modélise la population, on a : $P_{n+1} = \left(1 - \frac{1.5}{100}\right) P_n = 0,985 \times P_n$.

   Par identification, on reconnait que la suite (P_n) est de la forme $P_{n+1} = q \times P_n$, la forme réccurente d'une suite géométrique. Par conséquent, (P_n) est une géométrique de raison $q = 0,985$ et de premier terme $P_0 = 50000$.

3. La forme explicite d'une suite géométrique est de la forme $P_n = P_0 \times q^n$. D'après les informations obtenues dans la question 2, on en déduit que la forme géométrique explicite de (P_n) est :

   $P_n = 50000 \times 0,985^n$

4. Trois méthodes :

   - **Méthode 1** : Comme $P_0 > 0$ et que $0 < q < 1$ alors la suite est décroisante *(résultat de cours)*

   - **Méthode 2** : Une suite géométrique est décroissante si le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1$.

     Montrons que $\frac{Pn+1}{P_n} < 1$ *(marche seulement pour les suites géométriques)*
     Deux façons
     - 1ère façon : Comme la forme réccurente de (P_n) est $P_{n+1} = P_n \times 0,985$,
       alors : $\frac{Pn+1}{P_n} = 0,985 < 1$.
       Donc la suite (P_n) est décroissante.
     - 2ème façon : Comme la forme explicite de (P_n) est $P_n = 50000 \times 0,985^n$
       alors : $\frac{Pn+1}{P_n} = \frac{50000 \times 0,985^{n+1}}{50000 \times 0,985^n} = \frac{\cancel{50000} \times 0,985^{n+1}}{\cancel{50000} \times 0,985^n} = \frac{0,985^{n+1}}{0,985^n} = 0,985 < 1$

- **Méthode 3 :** *(Marche pour toutes les suites explicites)*
  (P_n) est strictement décroissante si et seulement si $P_{n+1} - P_n < 0$

  $$P_{n+1} - P_n$$
  $$50000 \times 0,985^{n+1} - 50000 \times 0,985^n$$
  $$50000 \times 0,985^n(0.985 - 1)$$

  Pour tout entier naturel n, $50000 \times 0,985^n > 0$ et $(0.985 - 1) = -0,15$.

  Par conséquent le produit : $50000 \times 0,985^n(0.985 - 1) < 0$

  Ainsi $P_{n+1} - P_n < 0$

  Donc la suite (P_n) est strictement décroissante.

5. On détermine que $P_{45} \approx 25327$ et que $P_{46} \approx 24948$. Donc au bout de 46 ans, c'est à dire en 2008+46=2054, la population aura diminué de moitié.

Exercice 3 (......../9 points)

Au 1er janvier 2018, une association compte 3000 adhérents. On constate que chaque mois:

- 2 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 50 nouvelles personnes adhérent à l'association.

Partie A :

1. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1er mars 2018.

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que $u_0 = 3000$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,98u_n + 50.$$

Le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois.

2. Calculer u_1, u_2. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 2500$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Déterminer la forme explicite de la suite (v_n).
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 500 \times 0,98^n + 2500$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

La responsable de l'association, souhaite déterminer au bout de combien de mois le nombre de membres inscrits sera inférieur à 2900.

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il permette de répondre au problème posé.

$U \leftarrow 3000$
$N \leftarrow 0$
Tant que ....
    $U \leftarrow 0,98U + 50$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher N

Partie C :

Le montant de la cotisation mensuelle à l'association est de 10 euros.

Calculer la somme totale que l'association espère obtenir pour l'année 2018.

Solution :

Partie A :

1.
   - Au 1er Janvier 2018, la population a diminué de 2% et 50 nouveaux adéhrents sont arrivés. Ainsi, l'estimation du nombre d'adhérents dans l'association est : $3000 \times (1 - 0,02) + 50 = 3000 \times 0,98 + 50 = 2990$ adhérents.
   - Au 1er Mars 2018, la population a diminué de 2% et 50 nouveaux adéhrents sont arrivés. Ainsi, l'estimation du nombre d'adhérents dans l'association est : $2990 \times (1 - 0,02) + 50 = 2990 \times 0,98 + 50 \approx 2980$ adhérents.

2. $u_1 = 0,98u_0 + 50 = 0,98 \times 3000 + 50 = 2990$

   $u_2 = 0,98u_2 + 50 = 0,98 \times 2990 + 50 = 2980,2$

   Montrons que la suite (u_n) n'est pas géométrique (2 méthodes)

   - **Méthode 1 :** La suite (u_n) ne semble pas être géométrique. Par identification c'est une suite arithmético-géométrique, en effet elle est de la forme $U_{n+1} = k \times u_n + p$ avec $k = 0,98$, (donc $k \neq 1$ ce qui implique qu'elle ne peut être arithmétique) $p = 50$ (donc $p \neq 0$ ce qui implique qu'elle ne peut être géométrique).
   - **Méthode 2 :** Une suite (u_n) est géométrique si et seulement pour tout n entier naturel $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ est constant.

     Or si $n = 0$ le rapport est égal à $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2990}{3000} = \frac{299}{300} \approx 0,99666666....$

     si $n = 1$ le raport est égal à $\frac{u_2}{u_1} = \frac{2980,2}{2990} \approx 0,9967224....$

     Le rapport n'est pas constant, donc (u_n) n'est pas géométrique.

3. (a) $v_n = u_n - 2500$. Ainsi : $u_n = v_n + 2500$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + 2500$.

   Comme

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 0,98u_n + 50 \\
v_{n+1} + 2500 &= 0,98(v_n + 2500) + 50 \\
v_{n+1} + 2500 &= 0,98 \times v_n + 0,98 \times 2500 + 50 \\
v_{n+1} + 2500 &= 0,98 \times v_n + 2450 + 50 \\
v_{n+1} + \cancel{2500} &= 0,98 \times v_n + \cancel{2500} \\
v_{n+1} &= 0,98 \times v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est de la forme $v_{n+1} = q \times v_n$, la forme réccurente d'une suite géométrique. Par identification, on en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,98$.

Comme $v_n = u_n - 2500$, le premier terme de la suite (v_n) est : $v_0 = u_0 - 2500 = 3000 - 2500 = 500$

(b) Une suite géométrique sous sa forme explicite s'exprime sous la forme $v_n = v_0 \times q^n$. D'après les informations obtenues dans la question 3.a; on a donc $v_n = 500 \times 0,98^n$.

(c) Comme $v_n = u_n - 2500$, on a $u_n = v_n + 2500$, comme $v_n = 500 \times 0,98^n$ d'après la question 3.b, on en déduit que $u_n = 500 \times 0,98^n + 2500$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + 2500 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + \lim\limits_{n\to+\infty} 2500.$

Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0,98^n = 0$, car $0 < q < 1$ et $v_0 > 0$. et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2500 = 2500$

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2500$.

Comme (u_n) modélise l'évolution du nombre d'adhérents dans l'association, on peut interpreter ce résultat :

- Au bout d'un certain nombres d'années, le nombre d'adhérents dans l'association se stabilisera à 2500 adhérents.
- Le nombre d'ahdérents dans l'association ne descendera pas en dessous de 2500 adhérents (si la suite est décroissante pour tout entier n naturel (condition supplémentaire importante)).

5.

```
U ← 3000
N ← 0
Tant que U>2900
    U ← 0,98U + 50
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

6. La cotisation est mensuelle, c'est à dire que chaque mois, les adhérents payent la cotisation. Les adhérents du mois de janvier payent 10€, février idem, etc.

On peut donc calculer la somme du nombre d'adhérents de chaque mois dans l'année 2018 et multiplier ce résultat par la prix de la cotisation.

La somme du nombre d'ahdérents du 1er Janvier 2018 au 1er Décembre 2018 est :

$$u_0 + u_1 + ... + u_{11}$$

On sait que $u_n = v_n + 2500$

$$v_0 + 2500 + v_1 + 2500 + ... + v_{11} + 2500$$

$$v_0 + v_1 + ... + v_{11} + 12 \times 2500$$

Comme (v_n) est géométrique $S_{11} = v_0 \times \dfrac{1-q^{12}}{1-q}$

Ainsi : $v_0 + v_1 + ... + v_{11} + 12 \times 2500 = 500 \times \dfrac{1-0,98^{12}}{1-0,98} + 12 \times 2500 \approx 35382,08$ adhérents.

$35382,08 \times 10 = 353820,8$

La somme totale que l'association peut espérer est d'obtenir 350820,8€.

$\sim$