Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 2

Note

...../20

Exercice 1 (......../4 points)

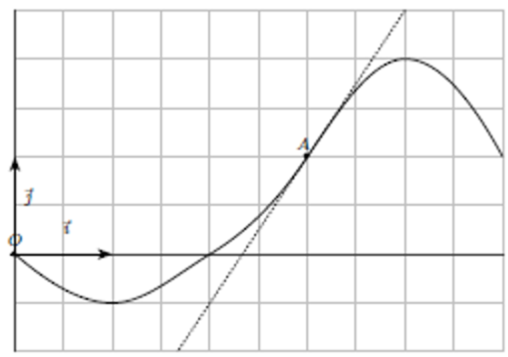
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Le courbe $\mathscr{C}_f$ (en traits pleins) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

La droite T (en pointillés) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3; 1)$.

La fonction F, définie et dérivable sur $[0; 5]$, a pour dérivée la fonction f.

F vérifie $F(2) = 0$.

1. Répondre sans justifier :
   (a) Donner $f(1)$.
   (b) Résoudre $f(x) > 0$.
2. Expliquer chaque réponse :
   (a) Déterminer $f'(3)$.
   (b) Dresser le tableau de signes de f'.
   (c) Donner le tableau de variations de F.



Solution :

1. (a) $f(1) = -0,5$
   (b) $S =]2; 5]$
2. (a) On regarde le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.
   Par lecture graphique : $m = \dfrac{3}{2} = 1,5$.
   Pour trouver m, on peut aussi considérer le point $B(2; -0,5)$ qui appartient à la tangente et calculer : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-(-0,5)}{3-2} = \dfrac{3}{2} = 1,5.$, donc $f'(3) = \dfrac{3}{2}$.
   (b)
   - La fonction f est décroissante sur $[0; 1]$, par conséquent $f'(x) \leqslant 0$.
   - La fonction f est croissante sur $[1; 4]$, par conséquent $f'(x) \geqslant 0$.
   - La fonction f est décroissante sur $[4; 5]$, par conséquent $f'(x) \leqslant 0$.

x	0		1		4		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

.

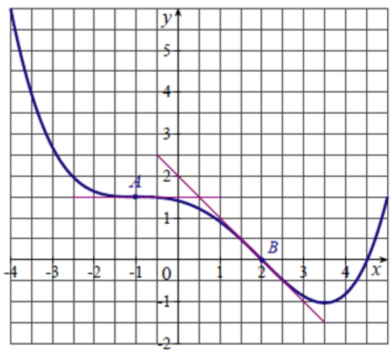
   (c) Comme $(F(x))' = f(x)$, l'étude du signe de f, nous permet de déterminer les variations de F sur $[0; 5]$.

x	0		2		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

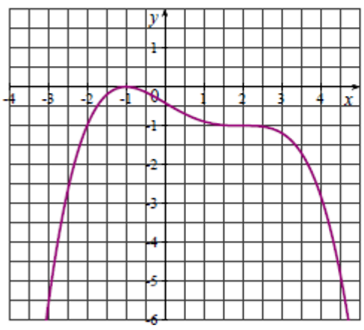
Exercice 2 (......../3 points)

La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f', la dérivée de la fonction f.

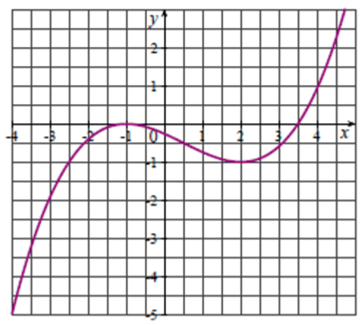
Courbe $\mathscr{C}_f$



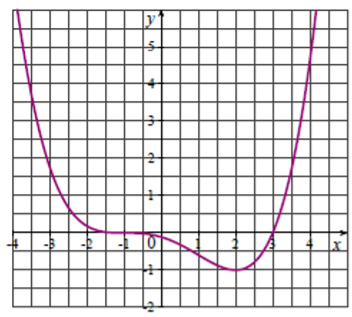
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, choisir celle qui représente la courbe représentative de f'. Justifier.

Solution :

- La fonction f est décroissante sur $[-4; 3,5]$. Par conséquent $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-4; 3,5]$.
- La fonction f est croissante sur $[3,5; 5]$. Par conséquent $f'(x) \geqslant 0$ sur $[3,5; 5]$.

  Avec ces informations, on peut donc construire le tableau suivant :

x	-4		3.5		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1.5

La courbe $\mathscr{C}_2$ est la seule courbe parmi les courbe proposées qui est négative sur $[-4; 3,5]$, positive sur $[3,5; 5]$.

Donc la courbe représentative de la fonction f' est $\mathscr{C}_2$.

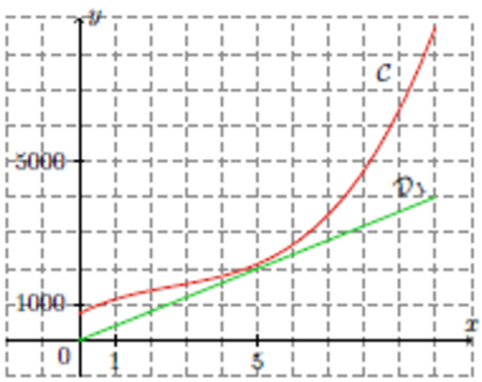
Exercice 3 (......../6 points)

Une entreprise produit du tissu en coton qu'elle conditionne en "roules" de 2000m de long et 1,5m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10km en continu. Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur x, en km, par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750, \text{ où } x \in [0; 10].$$

Etude de bénéfice :

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction C et la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 400x$.

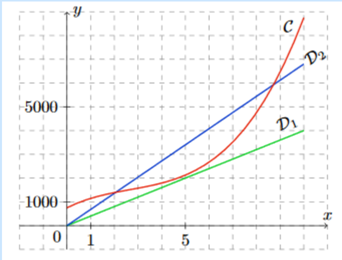


1. Au vu du graphique, expliquer pourquoi l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est à 400 euros par km.
2. Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros par km.
   (a) Tracer sur la figure ci-dessus, la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 680x$.
   (b) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par la graphique, pour quelles quantiés produites et vendues, l'entreprise réalise un bénéfice si le prix du marché est de 680 euros par km.
   (c) Soit la fonction bénéfice B définie sur $[0; 10]$ par :
   $$B(x) = 680x - C(x)$$
   Exprimer $B(x)$ en fonction x uniquement et démontrer que pour tout réel x de $[0; 10]$, on a :
   $$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$
   (d) Etudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0; 10]$.
   (e) En déduire la quantité produite et vendue pour laquelle le bénéfice réalisé par l'entreprise est maxmimum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Solution :

1. La droite $\mathcal{D}_1$ représentant la recette se situe strictement en-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentant le coût. On interprète ainsi que le coût sera toujours plus élevé que la recette, l'entreprise ne peut donc pas réaliser de bénéfice.

2. (a)



(b) Graphiquement, l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle fabrique et vend entre 2 et 8,6 km de tissu en continu (environ).

(c) Soit B la fonction représentant le bénéfice définie sur $[0;10]$:

$$\begin{aligned} B(x) &= 680x - C(x) \\ &= 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) \\ &= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 \\ &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750 \end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable sur $[0;10]$:
$B'(x) = 15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$

(d) Afin de déterminer les variations de la fonction B, étudions d'abord le signe de sa fonction dérivée B'.
B' est une fonction polynomiale du second degré, nous savons déterminer son signe.
$\Delta = b^2 - 4ac = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000$, $\sqrt{\Delta} = 300$. $\Delta > 0$, la fonction B' admet deux racines réelles.
$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-240+300}{2 \times (-45)} = -\dfrac{2}{3}$
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-240-300}{2 \times (-45)} = 6$
L'étude du signe de B' sur $\mathbb{R}$ (car $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'étude du signe de B' sur $[0;10]$ et les variations de B sur $[0;10]$:

x	0		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-750	$\nearrow$	1410	$\searrow$	-1950

(e) Pour réaliser un bénéfice maximal de 1410 euros, l'entreprise doit produire et vendre 6km de tissu.

Exercice 4 (......../7 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{10}{x+1}$

1. Montrer que, pour tout x de $[0;5]$: $f'(x) = \dfrac{2x^3+4x^2+2x-10}{(x+1)^2}$
2. (a) Soit g la fonction définie sur $[0;5]$ par $g(x) = 2x^3+4x^2+2x-10$. Montrer que g est strictement croissante et s'annule en une seule valeur α.
   (b) Déterminer la valeur arrondie de α à 0,01 près.
   (c) En déduire le signe de $g(x)$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $[0;5]$. (On établira un lien avec la question 2)

Solution :

1. Deux possibilités :
   - Mettons f au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + \frac{10}{x+1}\\
f(x) &= x^2 \times \frac{x+1}{x+1} + \frac{10}{x+1}\\
f(x) &= \frac{x^2(x+1)+10}{x+1}\\
f(x) &= \frac{x^3+x^2+10}{x+1}
\end{aligned}$$

La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$. f' sera donc de la forme $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.
$u(x) = x^3+x^2+10$, $u'(x) = 3x^2+2x$
$v(x) = x+1$, $v'(x) = 1$
Ainsi :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(3x^2+2x)\times(x+1)-(x^3+x^2+10)\times 1}{(x+1)^2}\\
f'(x) &= \frac{3x^3+3x^2+2x^2+2x-x^3-x^2-10}{(x+1)^2}\\
f'(x) &= \frac{2x^3+4x^2+2x-10}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

- La dérivée de x^2 est $2x$, la dérivée de $\dfrac{10}{x+1}$ (forme $\dfrac{1}{u}$) est $\dfrac{-10}{(x+1)^2}$.

  Ainsi $f'(x) = 2x - \dfrac{10}{(x+1)^2}$. Mettons f' au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x - \frac{10}{(x+1)^2} \\
f'(x) &= 2x \times \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{10}{(x+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{2x(x+1)^2 - 10}{(x+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{2x(x^2+2x+1) - 10}{(x+1)^2} \\
f'(x) &= \frac{2x^3+4x^2+2x-10}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

2. (a) Pour déterminer les variations de g, étudions le signe de sa dérivée g'.
   g est dérivable sur $[0;5]$.
   $g'(x) = 6x^2 + 8x + 2$,
   $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times 6 \times 2 = 64 - 48 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$. $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles :
   $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+4}{2\times 6} = -\dfrac{1}{3}$
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-4}{2\times(6)} = -1$
   L'étude du signe de g' sur $\mathbb{R}$ (car $a > 0$) :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   L'étude du signe de g' sur $[0;5]$ et les variations de g sur $[0;5]$:

x	0		5
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-10	$\nearrow$	350

   Ainsi $g'(x) > 0$ sur $[0;5]$ et la fonction g est strictement croissante sur $[0;5]$.
   La fonction g est continue et strictemenent croissante sur $[0;5]$. $-10 \leqslant g(x) \leqslant 350$ pour $x \in [0;5]$. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

   (b) Avec la calculatrice, on détermine $\alpha \approx 1,12$.

   (c) A l'aide des deux questions précédentes, on peut construire le tableau suivant :

x	0		α		5
$g(x)$	-10	$\nearrow$	0	$\nearrow$	350
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi g est négative sur $[0;\alpha]$ et positive sur $[\alpha;5]$.

3. On constate que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$. La fonction $x \mapsto (x+1)^2$ est une fonction strictement positive sur $[0;5]$. La signe de la fonction f' dépend du signe de la fonction g. On en déduit alors les variations de la fonction g :

x	0		α		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	10	$\searrow$	≈ 6	$\nearrow$	≈ 26.7

$\sim$