Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

DS 4

Note

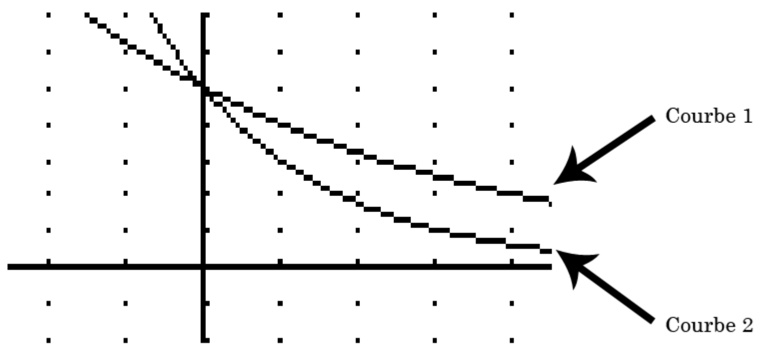
...../20

Le sujet est à restituer avec la copie.

Exercice 1 (......../3 points)

On considère les fonctions exponentielles notées f et g définies par $f(x) = 0,6^x$ et $g(x) = 0,8^x$. On a tracé à la calculatrice, leur courbe représentative.

Une graduation sur l'axe des abscisses correspond à une unité.



Pour chaque question, entourer la bonne réponse.

1. Une graduation sur l'axe des ordonnées correspond à :
   a) 0,1 b) 0,2 c) 0,5

2. La courbe représentant la fonction f est :
   a) La courbe 1 b) La courbe 2

3. On considère l'algorithme suivant :

> $X \leftarrow 0$
> Tant que $g(X) > 0,6$ ou $f(X) > 0,2$ faire :
> $X \leftarrow X + 1$
> Fin Tant que
> Afficher X

Compléter le tableau suivant avec des valeurs arrondies à 10^{-2} :

Valeur de X	0	1	2	3	4	5
Valeur de $f(X)$						
Valeur de $g(X)$						

On rappelle qu'une boucle exécute les instructions appartenant à son bloc d'instruction tant que la condition de la boucle est vérifiée.

Ainsi à son exécution, l'algorithme affiche en sortie :

a) 3 b) 4 c) 5

Solution :

1. b) 0,2. Il y a 5 graduations entre l'ordonnée 0 et l'ordonnée 1. On le constate, car $f(0) = g(0) = 1$. Ainsi, une graduation est égale à $\dfrac{1}{5} = 0,2$

2. b) La courbe 2. En observant que $f(1) = 0,6$ et $g(1) = 0,8$, on a $f(1) < g(1)$.

3.

Valeur de X	0	1	2	3	4	5
Valeur de $f(X)$	1	$0,6$	$0,36$	$0,22$	$0,13$	$0,08$
Valeur de $g(X)$	1	$0,8$	$0,64$	$0,51$	$0,41$	$0,33$

b) 4. Car $f(4) = 0,6^4 < 0,2$; $g(4) = 0,8^4 < 0,6$ et $f(3) = 0,6^3 > 0,2$.

Exercice 2 (......../4 points)

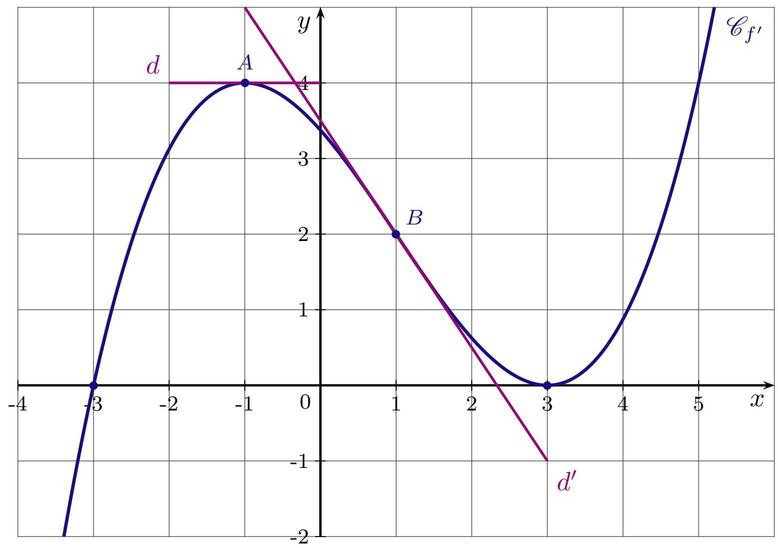
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = e^{-x}$.

PROPOSITION 1 :
La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x - 1$.

2. **On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ représentation graphique de la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
   On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f'' sa dérivée seconde.
   Les droites d et d' sont tangentes à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ respectivement aux points A d'abscisse (-1) et B d'abscisse 1.



PROPOSITION 2 :
La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

PROPOSITION 3 :
$f''(1) = -\dfrac{3}{2}$.

PROPOSITION 4 :
Au point d'abscisse (-1), la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion.

Solution :

1. **Proposition 1 : Faux.**

   $g'(x) = -e^{-x}$, $g'(0) = -e^0 = -1$, $g(0) = e^0 = 1$.

   La tangente à la courbe de la fonction g au point d'abscisse 0 a pour équation :

   $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -1(x-0) + 1 = -x + 1$

2. **Proposition 2 : Faux.**

   Sur $[1;3[$ la fonction f' est strictement décroissante, par conséquent f est concave sur $[1;3[$.

   Ce contre-exemple nous montre que f ne peut être convexe sur $[1;+\infty[$.

3. **Proposition 3 : Vrai.**

   Le nombre dérivé $f''(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ au point d'abscisse 1, c'est-à-dire le coefficient directeur de la droite d'. On considérera les points $B(1;2)$ et $C(3;-1)$ appartenant à la droite d' afin de déterminer son coefficient directeur.

   $m = \dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \dfrac{2-(-1)}{1-3} = \dfrac{3}{-2} = -\dfrac{3}{2}$.

   Donc $f''(1) = -\dfrac{3}{2}$.

4. **Proposition 4 : Vrai.**

   La droite d est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{f'}$ au point d'abscisse -1. On observe que d est une tangente horizontale. On peut donc déduire que le nombre dérivée $f''(-1) = 0$. Comme f' est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$ et strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, on en déduit que la dérivée seconde f'' change de signe au point d'abscisse -1. Par conséquent, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(-1; f(-1))$.

Exercice 3 (......../6 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (5x-7)e^x$.

1. a) Montrer que $f'(x) = e^x(5x-2)$.
   b) Dresser le tableau de signes de f'.
   c) En déduire les variations de f.
2. On admet que $f''(x) = e^x(5x+3)$.
   a) Dresser le tableau de signe de f''.
   b) En déduire la convexité de f.
   c) f admet-elle un point d'inflexion (justifier) ? Si oui, préciser ses coordonnées.

Solution :

1. a) On observe que f est de la forme uv. La dérivée de $(uv)' = u'v + uv'$.
   On pose : $u(x) = e^x$; $u'(x) = e^x$; $v(x) = 5x-7$; $v'(x) = 5$.
   Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(5x-7) + e^x \times 5 \\ f'(x) &= e^x(5x-7) + 5e^x \\ f'(x) &= e^x((5x-7)+5) \\ f'(x) &= e^x(5x-7+5) \\ f'(x) &= e^x(5x-2) \end{aligned}$$

   b) Étudions le signe de $5x-2$:

$$\begin{aligned} 5x-2 &> 0 \\ 5x &> 2 \\ x &> \frac{2}{5} \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} 5x-2 &< 0 \\ 5x &< 2 \\ x &< \frac{2}{5} \end{aligned}$$

   De plus, $e^x > 0$ pour tout x réel.
   On peut donc construire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$5x-2$		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	

   c) Grâce à l'étude du signe de f', on en déduit les variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-5e^{\frac{2}{5}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Étudions le signe de $5x+3$:

$$\begin{aligned} 5x+3 &> 0 \\ 5x &> -3 \\ x &> -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 5x+3 &< 0 \\ 5x &< -3 \\ x &< -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

De plus, $e^x > 0$ pour tout x réel.
On peut donc construire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$5x+3$		$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	

b) Grâce à l'étude du signe de f'', on en déduit la convexité de la fonction f :

- $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; -\frac{3}{5}[$, f est donc concave sur $]-\infty; -\frac{3}{5}[$.
- $f''(x) > 0$ sur $]-\frac{3}{5}; +\infty[$, f est donc convexe sur $]-\frac{3}{5}; +\infty[$.

c) f admet un point d'inflexion au point abscisse $-\dfrac{3}{5}$, car :

- $f''(-\frac{3}{5}) = 0$.
- f'' change de signe au point d'abscisse $-\dfrac{3}{5}$. Donc f change de convexité au point d'abscisse $-\dfrac{3}{5}$.

Ce point d'inflexion a pour coordonnées : $\left(-\dfrac{3}{5}; f\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$; c'est à dire : $\left(-\dfrac{3}{5}; -10e^{-\frac{3}{5}}\right)$.

Exercice 4 (......../7 points)

Soit f une fonction définie et continue sur $[0;10]$ telle que $f(x) = \dfrac{x}{e^{x-5}}$.

Partie A : Étude de la fonction.

1. Montrer $f'(x) = \dfrac{-x+1}{e^{x-5}}$.
2. Étudier le signe de f'.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Montrer que $f(x) = 30$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[0;10]$.
5. Encadrer les valeurs x_1 et de x_2 à 10^{-3} près .

   Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver((-x+1)/exp(x-5))` $(-(-x+1)*exp(x-5)-exp(x-5))/((exp(x-5))\wedge 2)$
2	`Factoriser (-(-x + 1) * exp(x - 5) - exp(x - 5)) / ((exp(x - 5))^2)` $(x-2)/(exp(x-5))$

6. A l'aide des résultats du logiciel, donner l'expression factorisée de f''.
7. En déduire la convexité de la fonction f.
8. f admet-elle un point d'inflexion (justifier) ? Si oui, préciser ces coordonnées.

Partie B : Interprétation des résultats.

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 10 000 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$)

Le bénéfice hebdomadaire noté $f(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut :

$$f(x) = \frac{x}{e^{x-5}}$$

1. Pour combien de poulies fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Préciser la valeur de ce bénéfice arrondi à la centaine d'euro prés.
2. Combien de poulies l'entreprise doit-elle fabriquer pour réaliser un bénéfice supérieur à 30 000 € ?

Solution :

Partie A :

1. On remarque que f est de la forme $\frac{u}{v}$, or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

   On pose : $u(x) = x$; $u'(x) = 1$; $v(x) = e^{x-5}$; $v'(x) = e^{x-5}$

   Par conséquent :

$$f'(x) = \frac{1\times e^{x-5} - xe^{x-5}}{(e^{x-5})^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-5} - xe^{x-5}}{(e^{x-5})^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-5}(1-x)}{(e^{x-5})^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-5}(1-x)}{e^{x-5}\times e^{x-5}}$$
$$f'(x) = \frac{\cancel{e^{x-5}}(1-x)}{\cancel{e^{x-5}}\times e^{x-5}}$$
$$f'(x) = \frac{1-x}{e^{x-5}}$$
$$f'(x) = \frac{-x+1}{e^{x-5}}$$

2. Étudions le signe de f' :

   - Étudions le signe de e^{x-5} : $e^{x-5} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Étudions le signe de $-x+1$:

$$\begin{aligned} -x+1 &> 0 \\ 1 &> x \\ x &< 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -x+1 &< 0 \\ 1 &< x \\ x &> 1 \end{aligned}$$

On peut donc construire le tableau de signe suivant :

x	0		1		10
e^{x-5}		$+$		$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$	

3.

x	0		1		10
f'		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^{-4}} = e^4$	$\searrow$	$\dfrac{10}{e^5}$

4. - f est une fonction continue et strictement croissante sur $[0;1]$. Ses images varient entre $f(0)=0$ et $f(1)=e^4 \approx 54,6$. D'après la propriété du théorème de valeurs intermédiaires, $f(x)=30$ admet une unique solution sur $[0;1]$.
   - f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[1;10]$. Ses images varient entre $f(1)=e^4 \approx 54,6$ et $f(10)=\dfrac{10}{e^5} \approx 0,07$. D'après la propriété du théorème de valeurs intermédiaires, $f(x)=30$ admet une unique solution sur $[1;10]$.
   - Par conséquent $f(x)=30$ admet deux solutions sur $[0;10]$.
5. A la calculatrice, on en déduit que : $0,262 < x_1 < 0,263$ et $2,525 < x_2 < 2,526$.
6. En interprétant les résultats donnés par le logiciel de calcul formel, on déduit que : $f''(x) = \dfrac{x-2}{e^{x-5}}$.
7. Étudions le signe de f'' :
   - Étudions le signe de e^{x-5}. $e^{x-5} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Étudions le signe de $x-2$:

$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x-2 &< 0 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

On peut donc construire le tableau de signe suivant :

x	0		2		10
e^{x-5}		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	

- $f''(x) < 0$ sur $[0;2[$, par conséquent la fonction f est concave sur $[0;2[$.
- $f''(x) > 0$ sur $]2;10]$, par conséquent la fonction f est convexe sur $]2;10]$.

8. f admet un point d'inflexion au point abscisse 2, car :
   - $f''(2) = 0$.
   - f'' change de signe au point d'abscisse 2. Donc f change de convexité au point d'abscisse 2.

   Ce point d'inflexion a pour coordonnées : $(2; f(2))$; c'est à dire : $\left(2; \dfrac{2}{e^{-3}}\right)$.

Partie B :

1. D'après la question A.3, f admet un maximum de $e^4 \approx 54,6$ atteint pour $x = 1$. On peut donc interpréter que l'entreprise réalise un bénéfice maximal d'environ 54 600 € pour 1 000 poulies fabriquées et vendues.
2. D'après la question A.5, $f(x) > 30$ pour $x \in]x_1; x_2[$. Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 30 000 € lorsqu'elle fabrique et vend entre 263 poulies et 2525 poulies.