Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

DS 5

Note

...../20

Le sujet est à restituer avec la copie.

Exercice 1 (......../4 points)

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'internet un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2 000 élèves, répartis dans les sections de seconde, première et terminale.

On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement internet.
- 1 740 élèves utilisent régulièrement internet.

Cette enquête permet de modéliser le choix d'un élève du lycée.

On choisit au hasard un questionnaire d'élève en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'évènement le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde
- E l'évènement le questionnaire est celui d'un élève en classe de première
- T l'évènement le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale
- I l'évènement le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet .

1. Compléter le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise internet régulièrement				
N'utilise pas internet régulièrement				
Total				

2. Déterminer la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement internet.
3. Déterminer la probabilité de I sachant T, notée $P_T(I)$, et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
4. Déterminer la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas internet.
5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement internet.
   Déterminer la probabilité que ce questionnaire soit celui d'un élève de première.

Solution :

1.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise internet régulièrement	760	630	350	1 740
N'utilise pas internet régulièrement	40	70	150	260
Total	800	700	500	2 000

Élèves de terminale : $\frac{1}{4} \times 2\,000 = 500$;

Élèves de première : $\frac{35}{100} \times 2\,000 = 700$; il reste donc $2\,000 - (500 + 700) = 800$ élèves en seconde.

Nombre d'élèves de terminale utilisant internet : $\dfrac{70}{100} \times 500 = 350$;

Nombre d'élèves de seconde utilisant internet : par différence : $1\,740 - (350 + 630) = 760$.

2. On a $p = \dfrac{760}{2\,000} = \dfrac{76}{200} = \dfrac{38}{100} = 0,38$.

3. On a $P(T) = \dfrac{1}{4} = 0,25$ et $P_T(I) = \dfrac{P(T \cap I)}{P(T)} = \dfrac{\frac{350}{2000}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{350}{500} = \dfrac{70}{100} = 0,7$.

   C'est la probabilité qu'un élève de terminale rencontré au hasard utilise internet : cette donnée est dans l'énoncé !

4. Sur $2\,000$ élèves 260 n'utilisent pas internet régulièrement :

   $p\left(\overline{I}\right) = \dfrac{260}{2000} = \dfrac{13}{100} = 0,13$.

5. Sur les $1\,740$ utilisateurs réguliers il y a 630 élèves de première ; la probabilité est donc égale à $P_I(E) = \dfrac{630}{1\,740} = \dfrac{3 \times 10 \times 21}{3 \times 58 \times 10} = \dfrac{21}{58}$.

Exercice 2 (......../6 points)

Le jour de l'ouverture d'un centre commercial vend 1 000 billets de loterie à 2 € l'unité. Parmi les 1 000 billets distribués, 2 donnent droit à un bon d'achat de 50 €, 10 donnent droit à un bon d'achat de 30 €, 20 donnent droit à un bon d'achat de 15 €, 50 donnent droit à un bon d'achat de 10 € et les autres billets ne gagnent rien.

1. Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de gagner un bon d'achat de 15 € ?
2. Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de ne rien gagner ?
3. On s'intéresse aux montants en euros des gains.
   a) Quels sont les différents gains possibles ?
   b) On considère X la variable aléatoire prenant comme valeur le gain obtenu sur un billet de loterie. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de gagner au moins 30 € ?
   d) Quelle est la probabilité pour une personne qui a reçu un billet de gagner au plus 15 € ?
4. a) Déterminer la recette qu'effectue le centre commercial sur les billets de loterie.
   b) Calculer l'espérance de X. En déduire la somme consacrée aux gagnants.
   c) A l'aide des question 5.a et 5.b, déterminer le bénéfice qu'effectue le centre commercial sur les billets de loterie.

Solution :

1. $p = \dfrac{20}{1000} = 0,02$
2. $p = \dfrac{1000 - (2 + 10 + 20 + 50)}{1000} = \dfrac{918}{1000} = 0,918$
3. a) 0€, 10€, 15€, 30€, 50€.

   b)

$X = x_i$	0	10	15	30	50
$P(X = x_i)$	0,918	0,05	0,02	0,01	0,002

   c) $P(X \geqslant 30) = P(X = 30) + P(X = 50) = 0,01 + 0,002 = 0,012$

   d) $P(X \leqslant 15) = P(X = 0) + P(X = 10) + P(X = 15) = 0,918 + 0,05 + 0,02 = 0,988$

4. a) $2 \times 1000 = 2000$. La recette de la loterie est de 2000€.

   b) $E(X) = 0 \times 0,918 + 10 \times 0,05 + 15 \times 0,02 + 30 \times 0,01 + 50 \times 0,002 = 1,2$. En moyenne, un joueur peut espérer gagner 1,2€ sur un billet de loterie. $1000 \times 1,2 = 1200$. La somme consacrée aux gagnants est de 1200€.

   c) 2000-1200=800. La loterie permet au centre commercial d'obtenir un bénéfice de 800€.

Exercice 3 (......../10 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note:

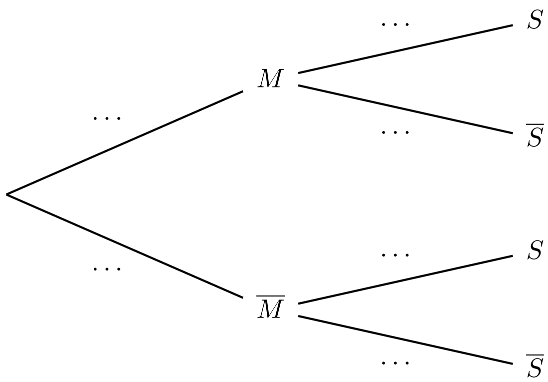
- S l'événement le voyageur fait sonner le portique ;
- M l'événement le voyageur porte un objet métallique .

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que:
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

   a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

   b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



   c) Montrer que: $P(S) = 0{,}021\,92$.

   d) En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}021\,92$.

   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

   c) Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de:
   - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique;
   - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

Solution :

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note:

- S l'évènement le voyageur fait sonner le portique ;
- M l'évènement le voyageur porte un objet métallique .

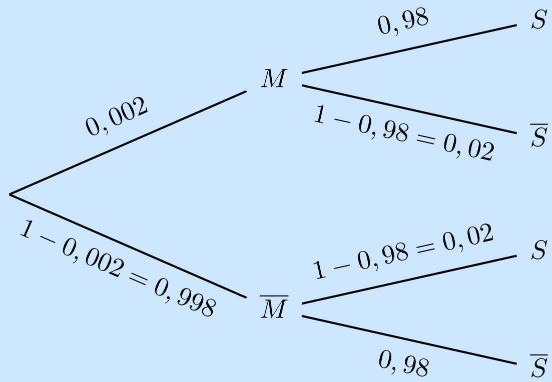
On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que:

   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

   a) Daprès l'énoncé, $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0,002$, $P_M(S) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0,98$.

   b) L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



   c) D'après la formule des probabilités totales :
   $P(S) = P(S\cap M) + P\left(S \cap \overline{M}\right) = P_M(S)\times P(M) + P_{\overline{M}}(S)\times P\left(\overline{M}\right) = 0,002\times 0,98 + 0,998\times 0,02 = 0{,}021\,92.$

   d) Par définition : $P_S(M) = \dfrac{P(M\cap S)}{P(S)} = \dfrac{P_M(S)\times P(M)}{P(S)} = \dfrac{0,002\times 0,98}{0,02192} \approx 0,089$

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}021\,92$.

   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   a) On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0{,}021\,92$.

   b) L'espérance d'une loi binomiale est : $E(X) = n \times p = 80 \times 0{,}021\,92 = 1{,}753\,6$.
   Donc par groupe de 80 personnes le portail sonnera un peu moins de 2 fois.

   c) On donne les valeurs arrondies à 10^{-3} de:

      - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique:
        $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}021\,92)^{80} \approx 0,830$.
      - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique:
        $p(X \leqslant 5) \approx 0,992$ (à la calculatrice).