Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Composition N^{o}1

Note

...../20

Remarque : Faire le sujet de spécialité sur une autre copie, en indiquant le nom du professeur de spécialité sur la copie.

Merci, bonne épreuve à tous.

Exercice 1 (......../5 points)

Pour chacunes des affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1. On considère f une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, ainsi que le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	6	↗ $+\infty$

   Affirmation : La fonction f est convexe sur $]-\infty;4]$.

2. **Affirmation :** La somme des 20 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ arrondie à l'unité est égal à : 2.
3. Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x^3 - 2x - 3$.

   Affirmation : f admet un point d'inflexion point de coordonnées $(0;0)$.
4. Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 8x + 4$.

   Affirmation : L'équation de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse 3 a pour équation : $y = -2x - 5$.

Solution :

1. Faux.

   La fonction $f'(x)$ est décroissante sur $]-\infty;4]$, par conséquent elle est concave sur $]-\infty;4]$.
2. Faux.

   La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 400$. On peut donc calculer la somme des 20 premiers termes :

$$S_{19} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 400 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}} \approx 800$$

3. Faux.

   $f(x) = 2x^3 - 2x - 3$, $f'(x) = 6x^2 - 2$, $f''(x) = 12x$.
   f admet un point d'inflexion lorsque $f''(x) = 0$ et change de signe.
   On en déduit le tableau de signe de f'' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Par conséquent, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(0; f(0))$. Comme $f(0) = 2\times0^3-2\times0-3 = -3$, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(0; -3)$.

4. Vrai.

L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a admet pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici $a = 3$ et $f'(x) = 2x - 8$

Ainsi, $f'(3) = 2 \times 3 - 8 = -2$ et $f(3) = 3^2 - 8 \times 3 + 4 = 9 - 24 + 4 = -11$.

On détermine alors l'équation pour la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 3 :

$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(3)(x-3) + f(3) = -2(x-3) - 11 = -2x + 6 - 11 = -2x - 5$.

Exercice 2 (......../5 points)

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.

Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire **(entre le 1er septembre et le 30 juin**);
- les effectifs constatés **à la rentrée de septembre** connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du **mois de juin** qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle **à la rentrée de septembre** $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
   b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
   Remarque : Si vous n'arrivez pas justifier la question 2, utiliser la forme récurrente de la suite (u_n) : $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$, pour résoudre la suite de l'exercice.
3. Recopier et compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme suivant afin qu'il calcule le nombre d'années à partir duquel le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
L1  n ← 0
L2  U ← 27 500
L3  Tant que U ⩽ ...
L4    n ← ...
L5    U ← ...
L6  Fin Tant que
L7  Afficher n
```

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de n	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

b) Donner la valeur de n calculée par cet algorithme.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n = 23\,600 \times 1,04^n + 3\,900$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Solution :

1. a) En juin 2017, on peut estimer qu'il y aura $27\,500 - 150 = 27\,350$ étudiants dans cette université.
b) À la rentrée de septembre 2017, il y aura à la suite de l'augmentation de $4\,\%$:
$1,04 \times 27\,350 = 28\,444$ étudiants.

2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2016 + n. En juin de l'année suivante (année $(n+1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de $u_n - 150$. Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n+1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de $4\,\%$, soit $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$.
Donc en septembre de l'année $(n+1)$ il y aura $1,04u_n - 156$ étudiants, soit pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = 1,04u_n - 156.$$

3. On complète les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1 n prend la valeur 0
L2 U prend la valeur 27 500
L3 Tant que $U \leqslant 33\,000$ faire
L4 $n \leftarrow n+1$
L5 $U \leftarrow 1,04 \times U - 156$
L6 Fin Tant que
L7 Afficher n

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

b) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $n = 6$.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

a) Comme $v_n = u_n - 3\,900$, on peut déduire que :
$u_n = v_n + 3\,900$
$u_{n+1} = v_{n+1} + 3\,900$
Or :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1,04u_n - 156 \\ v_{n+1} + 3\,900 &= 1,04(v_n + 3\,900) - 156 \\ v_{n+1} + 3\,900 &= 1,04v_n + 4\,056 - 156 \\ v_{n+1} + \cancel{3\,900} &= 1,04u_n + \cancel{3\,900} \\ v_{n+1} &= 1,04v_n \end{aligned}$$
La suite (v_n) est de la forme $v_{n+1} = qv_n$, elle est donc géométrique de raison $1,04$ et de premier terme
$v_0 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600$.

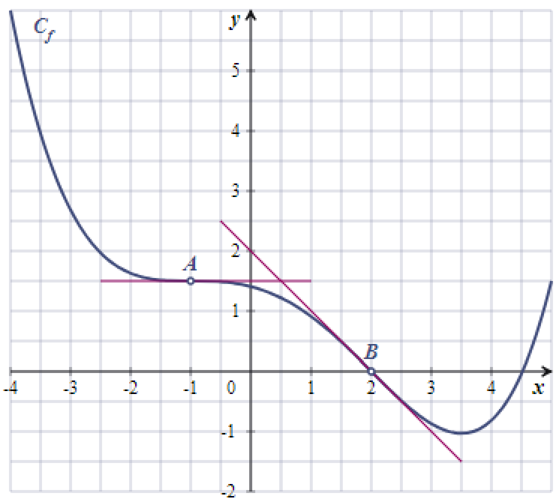
b) Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23\,600 \times 1,04^n$.
De plus, On a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3\,900 + 23\,600 \times 1,04^n$.

c) La suite (v_n) est une suite géométrique de $q = 1,04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est aussi égale à $+\infty$.
Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

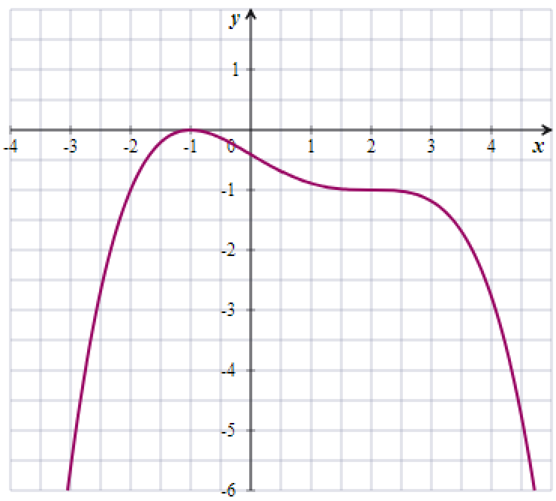
Exercice 3 (......../5 points)

Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note f', g' et h' les dérivées respectives des trois fonctions f, g et h.

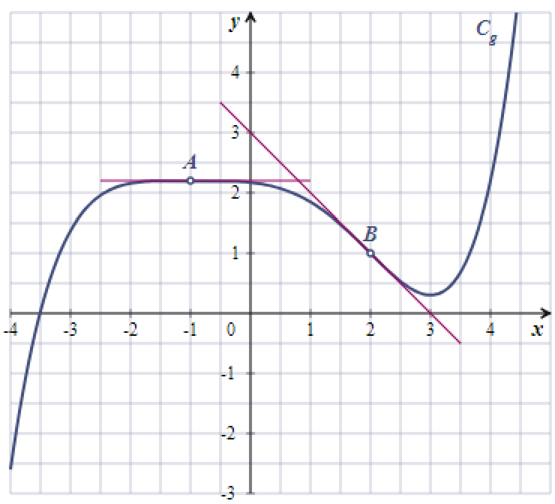
Courbe C_f



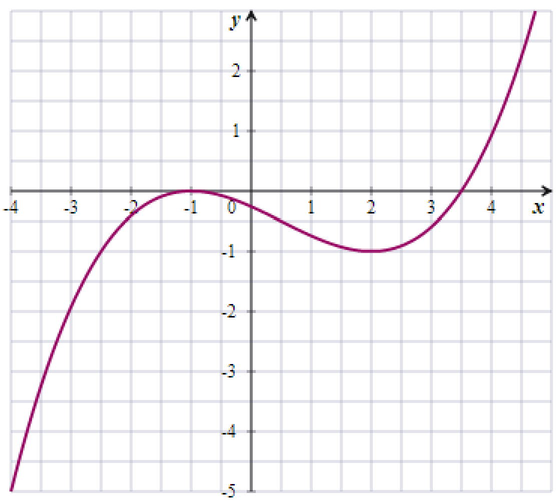
Courbe C_1



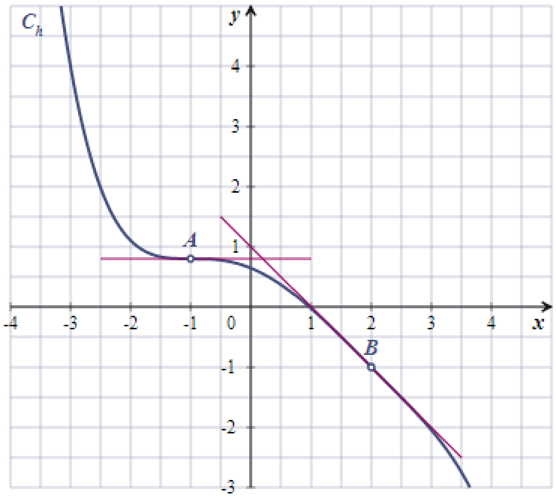
Courbe C_g



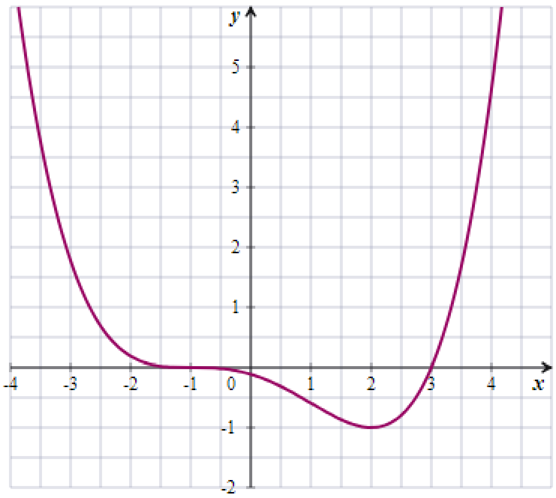
Courbe C_2



Courbe C_h



Courbe C_3



1. Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.
2. Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont les représentations graphiques des fonctions f', g' et h', MAIS pas nécessairement dans cet ordre.
   Associer à chacune des fonctions dérivées f', g' et h' sa courbe représentative, en justifiant votre réponse.
3. Justifier pourquoi $f''(0) < f''(4)$.
4. Combien de point(s) d'inflexion(s) la fonction g admet-elle ? Justifier votre réponse.
5. On considère t une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t''(x) = h(x)$. Déterminer en justifiant, l'intervalle où la fonction t est concave et l'intervalle où la fonction t est convexe.

Solution :

1. $f'(-1) = 0$ et $f'(2) = -1$.
2. A partir des variations de la fonction, nous pouvons en déduire le signe de sa fonction dérivée. Utilisons cette propriété afin de trouver les courbes représentatives des fonctions f', g', h'.

   •

x	$-\infty$		3.5		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   Parmi les trois courbes, la courbe $\mathcal{C}_2$ est la seule courbe correspondant au signe de f'. Par conséquent : $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de f'.

   •

x	$-\infty$		-1		3.5		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0.75	↗	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Parmi les trois courbes, la courbe $\mathcal{C}_3$ est la seule courbe correspondant au signe de g'. Par conséquent : $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de g'.

-

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$h(x)$	$+\infty \searrow -\infty$
$h'(x)$	$-$

Parmi les trois courbes, la courbe $\mathcal{C}_1$ est la seule courbe correspondant au signe de h'. Par conséquent : $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de h'.

3. Observons la convexité de la fonction f.

- f est convexe sur $]-\infty;-1[\bigcup]2;+\infty[$. Donc pour tout $x \in]-\infty;-1[\bigcup]2;+\infty[$, $f''(x) > 0$. Par conséquent : $f''(4) > 0$.
- f est concave sur $]-1;2[$. Donc pour tout $x \in]-1;2[$, $f''(x) < 0$. Par conséquent : $f''(0) < 0$.

Comme $f''(4) > 0$ et $f''(0) < 0$, on peut en déduire que $f''(0) < f''(4)$.

4. g admet un point d'inflexion. La tangente à la courbe d'abscisse 2 est la seule tangente qui traverse la courbe. Son point d'inflexion à pour coordonnées $(2;1)$.

5. On construit la tableau de signe la fonction h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$t''(x) = h(x)$		$+$	0	$-$	

Comme $t''(x) > 0$ sur $]-\infty;1[$, la fonction t est convexe sur $]-\infty,1[$.

Comme $t''(x) < 0$ sur $]1;+\infty[$, la fonction t est concave sur $]1;+\infty[$.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui ne suivent PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x-3$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

La fonction f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.
   b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α.
   c) En déduire le tableau de signe de f.
5. Calculer $f''(x)$.
6. a) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, calculer ses coordonnées.

Solution :

1. $f'(x)=3\times\dfrac{x^2}{3}-6x+8=x^2-6x+8.$
2. $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times 8=36-32=4$. $\Delta>0$, f' admet deux racines réelles sur $\mathbb{R}$. $\sqrt{\Delta}=2$.

   $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6+2}{2}=4$

   $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6-2}{2}=2$

   Comme le terme de degré deux est strictement positif ($a>0$), on déduit le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	≈ 3.67	$\searrow$	≈ 2.33	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) • Sur $[2;+\infty[$, les images de la fonction f sont strictements positives. Par conséquent $f(x)=0$ n'ademet de solution sur $[2;+\infty[$.
   • Sur $[0;2]$, f est continue et strictement croissante, ses images varient entre -3 et environ 3,7. D'après la propriété du théorème des valeurs intermmédiaires, $f(x)=0$ admet une unique solution sur $[0;2]$.

   Conclusion : L'équation $f(x)=0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.

b) A la calculatrice, on observe que $\alpha \approx 0,45$.

c)

D'après les variations et les images de la fonction f :

x	0	α	2	4	$+\infty$
$f(x)$	-3 ↗	0 ↗	≈ 3.67 ↘	≈ 2.33 ↗	$+\infty$

On en déduit son signe :

x	0		$\alpha \approx 0.45$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5. Comme $f'(x) = x^2 - 6x + 8$, on détermine que $f''(x) = 2x - 6$.

6. a) Etudions le signe de la dérivée seconde de f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

On en déduit le signe de f'' :

x	0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Comme $f''(x) > 0$ sur $]3;+\infty[$, f est convexe sur $]3;+\infty[$.
Comme $f''(x) < 0$ sur $[0;3[$, f est concave sur $[0;3[$.

b) f admet un point d'inflexion de coordonnées $(3; f(3))$, comme $f(3) = 3$, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(3;3)$.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui suivent <u>L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ</u>.

Une épidémie sévit dans une région du monde. D'après une étude, on modélise le nombre de malades x jours après le début de l'épidémie par la fonction f sur l'intervalle $[0;100]$ définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx + cx + d$$

On donne le nombre de malades par jour dans le tableau suivant :

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	60	233	514

Partie A : Modélisation

1. A l'aide du tableau établir le système vérifié par les inconnues a, b, c et d.

2. Résoudre ce système en utilisant le calcul matriciel.
3. En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B : Prévisions

On admet dans la suite de l'exercice que $f(x) = -x^3 + 60x^2 + 1$.

1. a) Etudier les variations de f sur $[0; 100]$.
   b) En déduire le moment où l'épidémie atteindra son plus fort niveau.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur $[0; 100]$.
   b) Déterminer une encadrement de x_0 à l'unité près.
   c) Combien de jours faut-il attendre pour que l'épidémie soit terminée ?
3. a) Calculer $f''(x)$ et déterminer sur quel intervalle la fonction f est concave et sur quel intervalle la fonction f est un convexe.
   b) La vitesse de propagation de l'épidémie est donnée par $f'(x)$. A quelle date cette vitesse est-elle maximale ? (justifier)