Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

DS 6

Note

...../20

Le sujet est à restituer avec la copie.

Exercice 1 (......../5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. L'expression $A = ln(2e^2) - ln(4) + ln(e)$ est égale à :

   a. $ln(2e^2 - 4 + e)$ **b.** $ln(2e^2) - ln(4e)$
   c. $3 - ln(2)$ **d.** $5 - 2ln(2)$

2. L'équation $e^{-0,5x} = 0,5$ admet pour solution :

   a. $x = 1,38629$ **b.** $x = -1$
   c. $x = 2ln(2)$ **d.** $-ln(2)$

3. Si a et b sont deux réels strictement positifs alors :

   a. $\dfrac{ln(a)}{ln(b)} = ln(a) - ln(b)$ **b.** $2ln(a) + ln(b) = ln(2ab)$
   c. $ln(a) - \dfrac{1}{2}ln(b) = ln\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)$ **d.** $ln(a) \times ln(b) = ln(a + b)$

4. L'ensemble S solution de l'équation $(x^2 - 1)ln(x) = 0$ est :

   a. $S = \{-1; 1\}$ **b.** $S = \{-1\}$ **c.** $S = \{1\}$ **d.** $S = \{0\}$

5. D'une année sur l'autre, un produit perd 5% de sa valeur. Quel calcul permet de déterminer le nombre minimum d'années pour que ce produit perde plus de 40% de sa valeur initiale ?

   a. $ln\left(\dfrac{0,6}{0,95}\right)$ **b.** $ln\left(\dfrac{0,4}{0,05}\right)$ **c.** $\dfrac{ln(0,6)}{ln(0,95)}$ **d.** $\dfrac{ln(0,4)}{ln(0,95)}$

Solution :

1.

$$\begin{aligned}
A &= ln(2e^2) - ln(4) + ln(e)\\
A &= ln(2) + ln(e^2) - ln(2^2) + 1\\
A &= ln(2) + 2ln(e) - 2ln(2) + 1\\
A &= ln(2) + 2 - 2ln(2) + 1\\
A &= 3 - ln(2)
\end{aligned}$$

Réponse c.

2.

$$\begin{aligned}
e^{-0,5x} &= 0,5 \\
ln(e^{-0,5x}) &= ln(0,5) \\
-0,5x &= ln(0,5) \\
x &= -\frac{ln(0,5)}{0,5} \\
x &= -\frac{ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \\
x &= -\frac{ln(1)-ln(2)}{\frac{1}{2}} \\
x &= -(0-ln(2)) \times \frac{2}{1} \\
x &= ln(2) \times 2 \\
x &= 2ln(2)
\end{aligned}$$

Réponse c.

3. **Réponse c.** preuve :

$$\begin{aligned}
ln(a) - \frac{1}{2}ln(b) &= ln(a) - ln(b^{\frac{1}{2}}) \\
&= ln\left(\frac{a}{b^{\frac{1}{2}}}\right) = ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)
\end{aligned}$$

Contres-exemples pour les autres propositions :

- a) pour $a = 1$, $b = e$,
  $\frac{ln(a)}{ln(b)} = \frac{ln(1)}{ln(e)} = \frac{0}{1} = 0$,
  $ln(a) - ln(b) = ln(1) - ln(e) = 0 - 1 = -1$.
  Or $0 \neq -1$.
  Donc $\frac{ln(a)}{ln(b)} \neq ln(a) - ln(b)$, pour tout a, b réels positifs.
- b) pour $a = 1$, $b = e$,
  $2ln(a) + ln(b) = 2ln(1) + ln(e) = 2 \times 0 + 1 = 1$,
  $ln(2ab) = ln(2 \times 1 \times e) = ln(2e) = ln(2) + ln(e) = ln(2) + 1 \approx 1,69$.
  Or $1 \neq 1,69$
  Donc $2ln(a) + ln(b) \neq ln(2ab)$, pour tout a, b réels positifs.
- d) pour $a = 1$, $b = 2$,
  $ln(a) \times ln(b) = ln(1) \times ln(2) = 0 \times ln(2) = 0$,
  $ln(a+b) = ln(1+2) = ln(3) \approx 1,1$.
  Or $0 \neq 1,1$
  Donc $ln(a) \times ln(b) \neq ln(a+b)$, pour tout a, b réels positifs.

4.

$$(x^2-1)ln(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
x^2 - 1 &= 0 \\
x^2 &= 1
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
ln(x) &= 0 \\
e^{ln(x)} &= e^0 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

$x^2 = 1$, pour $x = 1$ et $x = -1$.

Cependant $ln(-1)$ n'est pas définie, car $x \mapsto ln(x)$ est définie sur $]0; +\infty[$. Par conséquent, $((-1)^2 - 1)ln(-1)$ ne se calcule pas. -1 est une valeur interdite. -1 n'est pas une solution de l'équation $(x^2-1)ln(x) = 0$.

Donc $S = \{1\}$.

Réponse c.

5. On considère V_f la valeur finale, V_i la valeur initiale, n le nombre d'année. Pour n diminutions successives de 5% par an, on modélise la diminution par :

$$V_f = V_i\left(1 - \frac{5}{100}\right)^n = V_i \times 0,95^n$$

On cherche n tel que la valeur finale soit égale à la diminution de 40% de la valeur initiale. Par conséquent $V_f = (1 - \frac{40}{100}) = 0,6V_i$.

Comme dans cette situation :

$$V_f = V_i \times 0,95^n$$

et que

$$V_f = 0,6V_i$$

On en déduit que l'égalité ci-dessous répond au problème :

$$\begin{aligned}
0,6V_i &= V_i \times 0,95^n \\
\frac{0,6V_i}{V_i} &= 0,95^n \\
\frac{0,6\cancel{V_i}}{\cancel{V_i}} &= 0,95^n \\
0,6 &= 0,95^n \\
ln(0,6) &= ln(0,95^n) \\
ln(0,6) &= nln(0,95) \\
\frac{ln(0,6)}{ln(0,95)} &= n \\
n &= \frac{ln(0,6)}{ln(0,95)}
\end{aligned}$$

Réponse c.

Exercice 2 (......../8 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ telle que, pour tout réel x de cet intervalle :

$$f(x) = (5 - 5ln(x))(ln(x) - 2)$$

Partie A : Étude d'une fonction :

1. a) Résoudre $f(x) = 0$.
   b) En déduire le tableau de signe de la fonction $f(x)$.
2. a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{5(3 - 2ln(x))}{x}$.
   b) En déduire les variations de la fonction f.
3. a) Montrer que $f(x) = 1$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[1; 10]$.
   b) Encadrer x_1 et x_2 à $0,01$ près.

Partie B : Application :

Une entreprise fabrique et revends des jouets. $f(x)$ modélise le résultats (bénéfice ou perte) en milliers d'euros qu'elle réalise lorsqu'elle fabrique x centaines de jouet, avec $x \in [1; 10]$.

En utilisant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes :

1. Déterminer, à un jouet près, les quantités de jouets à produire pour ne pas travailler à perte.
2. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1000 €. Combien de jouets doit-elle alors fabriquer ?

Solution :

Partie A :

1. a)

$$(5 - 5ln(x))(ln(x) - 2) = 0$$

$$\begin{aligned} 5 - 5ln(x) &= 0 \\ 5 &= 5ln(x) \\ 5ln(x) &= 5 \\ ln(x) &= \frac{5}{5} \\ ln(x) &= 1 \\ e^{ln(x)} &= e^1 \\ x &= e \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} ln(x) - 2 &= 0 \\ ln(x) &= 2 \\ e^{ln(x)} &= e^2 \\ x &= e^2 \end{aligned}$$

b)

Étudions le signe de $x \mapsto 5 - 5ln(x)$

$$\begin{aligned} 5 - 5ln(x) &> 0 \\ 5 &> 5ln(x) \\ 5ln(x) &< 5 \\ ln(x) &< \frac{5}{5} \\ ln(x) &< 1 \\ e^{ln(x)} &< e^1 \\ x &< e \end{aligned}$$

Étudions le signe de $x \mapsto ln(x) - 2$

$$\begin{aligned} ln(x) - 2 &> 0 \\ ln(x) &> 2 \\ e^{ln(x)} &> e^2 \\ x &> e^2 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	1		e		e^2		10
$5 - 5ln(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$ln(x) - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
f		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. a) f est de la forme $u \times v$, où $(uv)' = u'v + uv'$.

On pose $u(x) = 5 - 5ln(x)$, $u'(x) = -\frac{5}{x}$,

$v(x) = ln(x) - 2$, $v'(x) = \frac{1}{x}$

Par conséquent :

$$f'(x) = -\frac{5}{x} \times (ln(x) - 2) + (5 - 5ln(x)) \times \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{-5(ln(x) - 2)}{x} + \frac{5 - 5ln(5)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{-5(ln(x) - 2) + 5 - 5ln(5)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{-5ln(x) + 10 + 5 - 5ln(5)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{-10ln(x) + 15}{x}$$
$$f'(x) = \frac{5 \times (-2)ln(x) + 5 \times 3}{x}$$
$$f'(x) = \frac{5(-2ln(x) + 3)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{5(3 - 2ln(x))}{x}$$

b)
Déterminons en premier lieu le signe de la fonction $x \mapsto 3 - 2ln(x)$

$$\begin{aligned} 3 - 2ln(x) &> 0 \\ 3 &> 2ln(x) \\ \frac{3}{2} &> ln(x) \\ ln(x) &< \frac{3}{2} \\ e^{ln(x)} &< e^{\frac{3}{2}} \\ x &< e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

x	1		$e^{\frac{3}{2}}$		10
5		$+$	0	$+$	
$3 - 2ln(x)$		$+$		$-$	
x		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-10	$\nearrow$	$\approx 1{,}25$	$\searrow$	$\approx -1{,}97$

3. a) • Sur l'intervalle $[1; e^{\frac{3}{2}}]$, la fonction f est strictement croissante et continue. Ses images varient entre -10 et $1,25$. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[1; e^{\frac{3}{2}}]$.
   • Sur l'intervalle $[e^{\frac{3}{2}}; 10]$, la fonction f est strictement décroissante et continue. Ses images varient entre $-1,97$ (environ) et $1,25$. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[e^{\frac{3}{2}}; 10]$.
   • Conclusion : $f(x) = 1$ admet deux solutions sur $[1; 10]$.

   b) A la calculatrice on obtient : $3,58 < x_1 < 3,59$ et $5,6 < x_2 < 5,61$.

Partie B :

1. L'entreprise réalise un bénéfice, lorsque son résultat est strictement positif. C'est-à-dire lorsque $f(x) > 0$. D'après la question A.1.b, $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]e; e^2[$. $e \approx 2,718$ et $e^2 \approx 7,389$. $f(x)$ s'exprime en milliers d'euros et x centaines de pièces fabriqués. On interprète alors que l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle fabrique et vend entre 272 et 738 jouets.

2. En utilisant le tableau de variations de la fonction f et les résultats obtenus dans la question A.3.

x	1		x_1		$e^{\frac{3}{2}}$		x_2		10
$f(x)$	-10	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1,.25$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\approx -1{,}97$

Si l'entreprise souhaite réaliser un bénéfice supérieure ou égale à 1000 €, elle devra vendre entre 359 et 560 jouets.

Exercice 3 (......../7 points)

On considère la fonction f définie sur $[1 ; 10]$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

La fonction f est deux fois dérivable sur $[1 ; 10]$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. a) Calculer $f'(x)$ sur $[1 ; 10]$.
   b) Construire le tableau de variation de la fonction f sur $[1 ; 10]$.
2. On admet que $f''(x) = \dfrac{2\ln(x) - 3}{x^3}$.
   a) Étudier le signe de f'' sur $[1 ; 10]$.
   b) En déduire sur quel intervalle la fonction f est concave.
   c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
3. On considère l'algorithme suivant:

$X \leftarrow 2$
$Y \leftarrow \frac{\ln(2)}{2}$
$Z \leftarrow \frac{\ln(2,1)}{2,1}$
TANT QUE $(Y < Z)$ FAIRE
    $X \leftarrow X + 0,1$
    $Y \leftarrow \frac{\ln(X)}{X}$
    $Z \leftarrow \frac{\ln(X+0,1)}{X+0,1}$
FIN TANT QUE
Afficher X

   a) Recopier et compléter le tableau suivant où les résultats sont arrondis au dix millième :

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,346 6	0,353 3	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	...		

   b) Quelle est la valeur affichée en sortie ? Que représente-t-elle pour la fonction f ?

Solution :

On considère la fonction f définie sur $[1 ; 10]$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

1. a) f est de la $\frac{u}{v}$, or $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

   On pose $u(x) = ln(x)$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$, $v'(x) = 1$.

   $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2}$

   $f'(x) = \frac{\frac{x}{x} - \ln(x)}{x^2}$

   $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$sur $[1~;~10]$.

   b) $f'(x)$ est du signe de $(1 - \ln(x))$ sur $[1~;~10]$ car son dénominateur est x^2 et $x^2 > 0$.
   Or pour tout x de $]0 : +\infty[$,
   $1 - \ln(x) > 0 \iff 1 > \ln(x)$ or $1 = \ln(\mathrm{e})$ et ln est croissante sur $]0~; +\infty[$,
   $1 > \ln(x) \iff \ln(\mathrm{e}) > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x$.
   L'intervalle$[1~;~10]$ contient e donc f' change de signe en e et

   $$f'(x) > 0 \iff 1 > \ln(x) \iff \mathrm{e} > x$$

   et $f(\mathrm{e}) = \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

x	1		e		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\frac{\ln(10)}{10}$

2. a) $f''(x)$ est du signe de $(2\ln(x) - 3)$ sur $[1~;~10]$ car son dénominateur est x^3 et $x^3 > 0$ sur $[1~;~10]$.
   Or pour tout x de $]0~;~+\infty[$,
   $2\ln(x) - 3 > 0 \iff 2\ln(x) > 3 \iff \ln(x) > 1,5 \iff x > \mathrm{e}^{1,5}$.
   L'intervalle $[1~;~10]$ contient $\mathrm{e}^{1,5}$ donc f'' change de signe en $\mathrm{e}^{1,5}$ et

   $$f''(x) > 0 \iff 1,5 < \ln(x) \iff \mathrm{e}^{1,5} < x.$$

x	1		$\mathrm{e}^{1,5}$		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   b) f est concave lorsque $f''(x) < 0$. $f''(x) < 0$ sur l'intervalle $[1; e^{1,5}[$. Par conséquent, f est concave sur $[1; e^{1,5}[$.

   c) La courbe $\mathscr{C}$ possède un point d'inflexion au point d'abscisse $e^{1,5}$ car en cette valeur de x, f'' s'annule en changeant de signe.

3. On considère l'algorithme suivant:

```
X ← 2
Y ← ln(2)/2
Z ← ln(2,1)/2,1
TANT QUE (Y < Z) FAIRE
    X ← X + 0,1
    Y ← ln(X)/X
    Z ← ln(X+0,1)/(X+0,1)
FIN TANT QUE
Afficher X
```

a)

X	Y	Z	Test : $Y < Z$
2	0,346 6	0,353 3	vrai
2,1	0,353 3	0,358 4	vrai
2,2	0,358 4	0,362 1	vrai
2,3	0,362 1	0,364 8	vrai
2,4	0,364 8	0,366 5	vrai
2,5	0,366 5	0,367 5	vrai
2,6	0,367 5	0,367 9	vrai
2,7	0,367 9	0,367 7	faux

b) La valeur affichée en sortie est la dernière valeur de X du tableau c'est $2,7$. c'est sur l'intervalle $[2,7\ ;\ 2,8]$ que la fonction f atteint son maximum :

après avoir été croissante , elle décroissante car e $\in [2,7\ ;\ 2,8]$.