Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

DS 7

Note

...../20

Le sujet est à restituer avec la copie.

Exercice 1 (......../4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.
Pour répondre, vous recopierez sur votre copie le numéro de la question et indiquerez la seule réponse choisie.

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^2$.

   A. $f'(x) = -\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}$ **B.** $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^2$
   C. $f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ **D.** $f'(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

2. D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017. L'arrondi au dixième du taux d'évolution annuel moyen est de :

   A. 10,5 % **B.** 68,8 %
   C. 39,3 % **D.** 20,8 %

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 2,4$. L'arrondi au centième de $P(X \geqslant 12,5)$ est:

   A. 0,58 **B.** 0,42
   C. 0,54 **D.** 0,63

4. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [14 ; 16]. $P(X \leqslant 15,5)$ est égal à :

   A. 0,97 **B.** 0,75
   C. 0,5 **D.** $\frac{1}{4}$

Solution :

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \mathrm{e}^2$.

   Pour tout réel x, $f'(x) = -3 \times \mathrm{e}^{-3x} + 0 = -3\mathrm{e}^{-3x}$ **Réponse C**

2. D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017. L'arrondi au dixième du taux d'évolution annuel moyen est de :

   Soit t le taux moyen annuel. De 2010 à 2017, 7 années se sont écoulées. Passer de 4 milliards à 15 milliards, correspond à un taux total de $\frac{15}{4} = 3,75$. On en déduit que : $t^7 = 3,75$ donc $t = ^7\sqrt{3,75} \approx 1,208$, soit une augmentation de $20,8\,\%$ environ. **Réponse D**

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 2,4$. L'arrondi au centième de $P(X \geqslant 12,5)$ est:

   $P(X \geqslant 12,5) = 0,5 + P(12,5 \leqslant X \leqslant 13) \approx 0,583.$ **Réponse A**

4. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [14 ; 16]. $P(X \leqslant 15,5)$ est égal à :

   $P(X \leqslant 15,5) = \frac{15,5-14}{16-14} = \frac{1,5}{2} = 0,75.$ **Réponse B**

Exercice 2 (......../3 points)

M Martin et M Valentin se donnent rendez-vous entre 12h et 14h. Proche du lieu fixé, M Valentin arrivera assurément à 12h30. Quant à M Martin, son arrivée dépend des conditions de circulation routière : il arrivera entre 12h et 13h.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X donnant l'heure darrivée de M Martin ?
2. Calculer la probabilité que M Martin arrive avant M Valentin.
3. Calculer la probabilité que M Valentin attende M Martin plus de 10 minutes.

Solution :

1. La loi probabilité suit une loi uniforme sur l'intervalle $[12; 13]$.
2. $p(X < 12,5) = \dfrac{12.5 - 12}{13 - 12} = \dfrac{0.5}{1} = 0.5$.
3. Si M Valentin attend plus de 10 minutes, cela implique que M Martin arrivé après 12h40. 40 minutes c'est le $\dfrac{2}{3}$ d'une heure. $12 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{36}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{38}{3}$.

   $p(X > \dfrac{38}{3}) = 1 - p(X < \dfrac{38}{3}) = 1 - \dfrac{13 - \frac{38}{3}}{13 - 12} = 1 - \dfrac{\frac{1}{3}}{1} = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 3 (......../8 points)

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à $0,01$ près.

Partie A

Un commerçant dispose dans sa boutique d'un terminal qui permet à ses clients, s'ils souhaitent régler leurs achats par carte bancaire, d'utiliser celle-ci en mode sans contact (quand le montant de la transaction est inférieur ou égal à 30 €) ou bien en mode code secret (quel que soit le montant de la transaction).

Il remarque que :

- 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €. Parmi eux :
  - 40 % paient en espèces;
  - 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact ;
  - les autres paient avec une carte bancaire en mode code secret.
- 20 % de ses clients règlent des sommes strictement supérieures à 30 €. Parmi eux :
  - 70 % paient avec une carte bancaire en mode code secret ;
  - les autres paient en espèces.

On interroge au hasard un client qui vient de régler un achat dans la boutique.

On considère les évènements suivants :

- V : pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 €;
- E : pour son achat, le client a réglé en espèces;
- C : pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode code secret;
- S : pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en mode sans contact .

1. a) Donner la probabilité de l'évènement V, notée $P(V)$, ainsi que la probabilité de S sachant V notée $P_V(S)$.
   b) Traduire la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
2. a) Calculer la probabilité que pour son achat, le client ait réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et qu'il ait utilisé sa carte bancaire en mode sans contact.
   b) Montrer que la probabilité de l'évènement: pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes est égale à $0,62$.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant.

On admet que X suit la loi normale de moyenne $27,5$ et d'écart-type 3.

On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 €.
2. Calculer la probabilité que ce client ait dépensé entre $24,50$ € et $30,50$ €.

Partie C

Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique.

Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique.

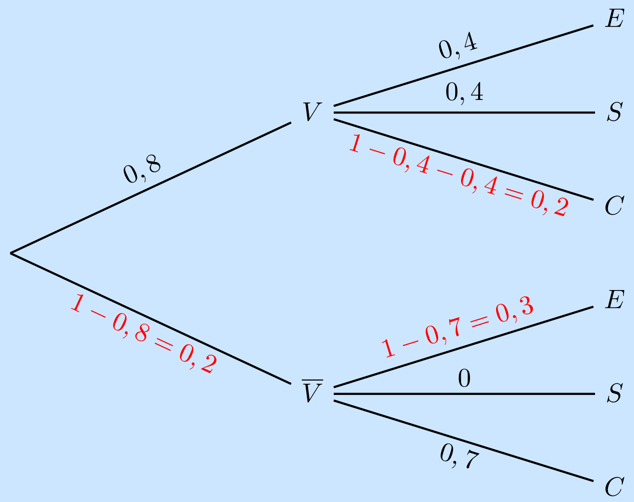
Déterminer, avec un niveau de confiance de $0,95$, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique.

Solution :

Partie A

1. a) D'après le texte, 80 % de ses clients règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €, donc $P(V) = 0,8$.
   D'après le texte, parmi ces 80 % qui règlent des sommes inférieures ou égales à 30 €, 40 % paient avec une carte bancaire en mode sans contact ; donc $P_V(S) = 0,4$.

   b) On traduit la situation de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré:



2. a) Pour son achat, le client a réglé un montant inférieur ou égal à 30 € et il a utilisé sa carte bancaire en mode sans contact est l'événement $V \cap S$:
   $P(V \cap S) = P(V) \times P_V(S) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$.

   b) Pour son achat, le client a réglé avec sa carte bancaire en utilisant l'un des deux modes, est l'événement $C \cup S$; les événements C et S étant incompatibles, $P(C \cup S) = P(C) + P(S)$.
   D'après la formule des probabilités totales:
   $P(C) = P(V \cap C) + P\left(\overline{V} \cap C\right) = P(V) \times P_V(C) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(C) = 0,8 \times 0,2 + 0,2 \times 0,7 = 0,3$
   $P(S) = P(V \cap S) + P\left(\overline{V} \cap S\right) = P(V) \times P_V(S) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(S) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0 = 0,32$
   On a donc $P(C \cup S) = P(C) + P(S) = 0,3 + 0,32 = 0,62$.

   Remarque - On aurait pu obtenir la probabilité demandée en passant par l'événement contraire: payer en espèces .

Partie B

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la dépense en euros d'un client suite à un achat chez ce commerçant. On admet que X suit la loi normale de moyenne 27,5 et d'écart-type 3. On interroge au hasard un client qui vient d'effectuer un achat dans la boutique.

1. La probabilité que ce client ait dépensé moins de 30 € est $P(X \leqslant 30) \approx 0,80$ à $0,01$ près (obtenu à la calculatrice).
2. La probabilité que ce client ait dépensé entre 24,50 € et 30,50 € est $P(24,5 \leqslant X \leqslant 30,5) \approx 0,68$ à $0,01$ près.
   C'est un résultat du cours: $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$.

Partie C

Une enquête de satisfaction a été réalisée auprès d'un échantillon de 200 clients de cette boutique.

Parmi eux, 175 trouvent que le dispositif sans contact du terminal est pratique, ce qui fait une fréquence dans l'échantillon de $f = \dfrac{175}{200} = 0,875$.

$n = 200 \geqslant 30$, $nf = 200 \times 0,875 = 175 \geqslant 5$ et $n(1 - f) = 200 \times 0,125 = 25 \geqslant 5$, donc on peut déterminer, avec un niveau de confiance de 0,95, l'intervalle de confiance de la proportion p de clients qui trouvent que le dispositif sans contact est pratique:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\, , \, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,875 - \frac{1}{\sqrt{200}}\ ;\ 0,875 + \frac{1}{\sqrt{200}}\right] \approx [0,80\ ;\ 0,95]$$

Exercice 4 (......../5 points)

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.

Le site internet ledislight.com spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles: un premier modèle dit d'intérieur et un deuxième modèle dit d'extérieur . Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.

   Ce contrôle remet-il en cause l'affirmation du fournisseur?

   Rappel: *lorsque la proportion p d'un caractère dans la population est connue, l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % d'une fréquence d'apparition de ce caractère obtenue sur un échantillon de taille n est donnée par:*

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux.

   Donner un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 %.

Solution :

Le site internet ledislight.com spécialisé dans la vente de matériel lumineux vend deux sortes de rubans LED flexibles: un premier modèle dit d'intérieur et un deuxième modèle dit d'extérieur . Le site internet dispose d'un grand stock de ces rubans LED.

1. Le fournisseur affirme que, parmi les rubans LED d'extérieur expédiés au site internet, 5 % sont défectueux. Le responsable internet désire vérifier la validité de cette affirmation. Dans son stock, il prélève au hasard 400 rubans LED d'extérieur parmi lesquels 25 sont défectueux.

   On prend un échantillon de taille 400 donc $n = 400$. Le fournisseur affirme que 5 % des rubans sont défectueux donc la probabilité qu'un ruban soit défectueux est $p = 0,05$.

   $n = 400 \geqslant 30$, $np = 20 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 380 \geqslant 5$ donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de rubans défectueux au seuil de 95 %:

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] \\ &= \left[0,05 - 1,96\sqrt{\frac{0,05\times 0,95}{400}}\,;\, 0,05 + 1,96\sqrt{\frac{0,05\times 0,95}{400}}\right] \approx [0,029\,;\, 0,071] \end{aligned}$$

   La fréquence de rubans défectueux dans l'échantillon considéré est $f = \dfrac{25}{400} = 0,062\,5$.

   Or $f \in I$ donc il n'y a pas de raison de remettre en cause l'affirmation du fournisseur.

2. Le fournisseur n'a donné aucune information concernant la fiabilité des rubans LED d'intérieur. Le directeur du site souhaite estimer la proportion de rubans LED d'intérieur défectueux. Pour cela, il prélève un échantillon aléatoire de 400 rubans d'intérieur, parmi lesquels 38 sont défectueux ce qui fait une fréquence $f = \dfrac{38}{400} = 0,095$.

   $n = 400 \geqslant 30$, $nf = 38 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 362 \geqslant 5$ donc on peut établir un intervalle de confiance de cette proportion au seuil de confiance de 95 %:

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,095 - \frac{1}{\sqrt{400}}\,;\, 0,095 + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,045\,;\, 0,145].$$