Nom(s)/Prénom(s) : ....

Le sujet est à restituer avec la copie.
Faire le sujet de spécialité sur une autre copie, en indiquant le nom du professeur de spécialité sur la copie.

Exercice 1 (......../5 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples).
Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte. Recopier le numéro de la question et la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

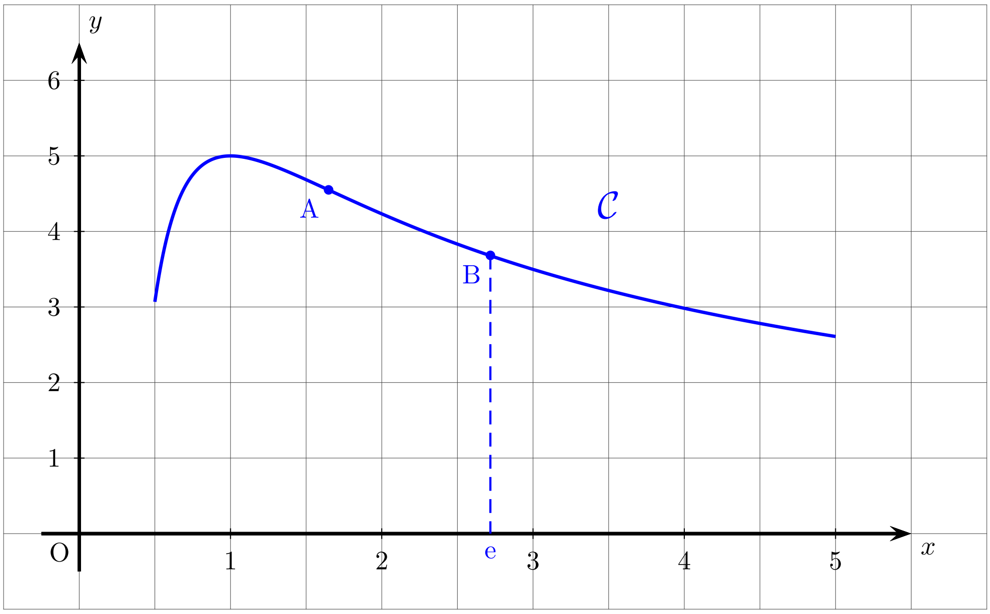
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par :

$$f(x) = \frac{5 + 5\ln x}{x}.$$

Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0,5 ; 5]. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle [0,5 ; 5] on a :

$$f'(x) = \frac{-5\ln x}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{10\ln x - 5}{x^3}.$$

1. La fonction f' est:
   a) positive ou nulle sur l'intervalle [0,5 ; 5]
   b) négative ou nulle sur l'intervalle [1 ; 5]
   c) négative ou nulle sur l'intervalle [0,5 ; 1]
2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est égal à :

   a. $-\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$ **b.** $\dfrac{10}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{5}{\mathrm{e}^3}$

3. La fonction f' est:
   a) croissante sur l'intervalle [0,5 ; 1]

b) décroissante sur l'intervalle [1 ; 5]

c) croissante sur l'intervalle [2 ; 5]

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathcal{C}$ est égale à :

a. 1,65 **b.** 1,6 **c.** $e^{0,5}$

5. On note $\mathcal{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

a. $20 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 30$ **b.** $10 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 15$ **c.** $5 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 8$

6. **Question indépendante :**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{2}{x} + e^{-2x+8}\, dx$.

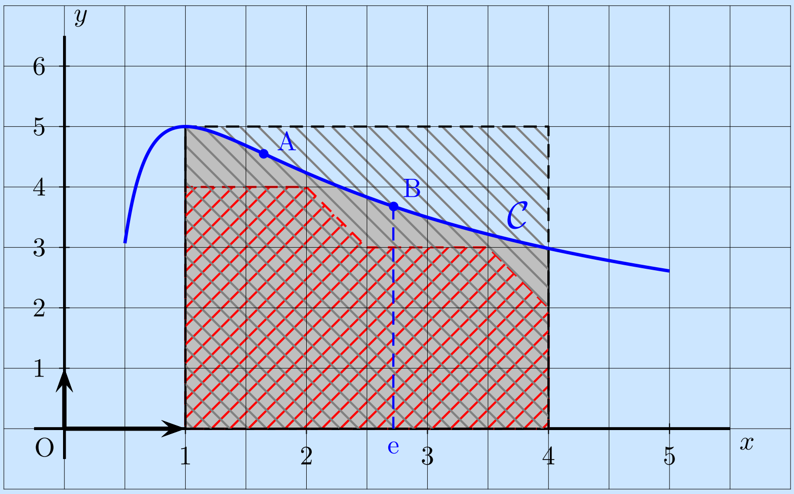
Solution :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0,5 ; 5] par : $f(x) = \dfrac{5 + 5\ln x}{x}$.

Sa représentation graphique est la courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-dessous dans un repère d'origine O. On admet que le point A placé sur le graphique est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0,5 ; 5]. On note B le point de cette courbe d'abscisse e.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f et f'' sa fonction dérivée seconde.



On admet que pour tout x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 5]$ on a : $f'(x) = \dfrac{-5\ln x}{x^2}$ et $f''(x) = \dfrac{10\ln x - 5}{x^3}$.

1. La fonction f' est:

a) positive ou nulle sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 5]$

b) négative ou nulle sur l'intervalle $[1\ ;\ 5]$

c) négative ou nulle sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 1]$

Réponse b

Sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 5]$, la fonction f' a le même signe que $-5\ln x$.
Or $x \geqslant 1 \iff \ln x \geqslant 0$, donc f' est négative sur $[1\ ;\ 5]$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point B est égal à :

a. $-\dfrac{5}{e^2}$ **b.** $\dfrac{10}{e}$ **c.** $\dfrac{5}{e^3}$

Réponse a

> D'après la courbe tracée, le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point B est négatif; la seule réponse possible est la réponse a.
> On peut aussi calculer ce coefficient directeur qui vaut $f'(\mathrm{e}) = -\dfrac{5\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} = -\dfrac{5}{\mathrm{e}^2}$.

3. La fonction f' est:

   a) croissante sur l'intervalle [0,5 ; 1]
   b) décroissante sur l'intervalle [1 ; 5]
   c) croissante sur l'intervalle [2 ; 5]

   Réponse c

   > Le sens de variation de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 5]$ dépend du signe de la fonction f'' sur cet intervalle, c'est-à-dire du signe de $10\ln x - 5$.
   > $10\ln x - 5 \geqslant 0 \iff 10\ln x \geqslant 5 \iff \ln x \geqslant 0,5 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{0,5}$
   > Donc $f''(x) \geqslant 0$ sur $\left[\mathrm{e}^{0,5}\ ;\ 5\right]$ donc sur $[2\ ;\ 5]$ car $\mathrm{e}^{0,5} \approx 1,65 < 2$.

4. La valeur exacte de l'abscisse du point A de la courbe $\mathcal{C}$ est égale à :

   a. 1,65 **b.** 1,6 **c.** $\mathrm{e}^{0,5}$

   Réponse c

   > Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle étudié donc l'abscisse de A est l'unique solution de l'équation $f''(x) = 0$ sur $[0,5\ ;\ 5]$.
   > $f''(x) = 0 \iff \dfrac{10\ln x - 5}{x^3} = 0 \iff 10\ln x - 5 = 0 \iff \ln x = 0,5 \iff x = \mathrm{e}^{0,5}$;
   > donc $x_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{0,5}$ ou $\sqrt{\mathrm{e}}$.

5. On note $\mathcal{A}$ l'aire, mesurée en unités d'aire, du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$. Cette aire vérifie :

   a. $20 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 30$ **b.** $10 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 15$ **c.** $5 \leqslant \mathcal{A} \leqslant 8$

   Réponse b.

   > Le domaine plan a été grisé sur le graphique; en comptant le nombre de carreaux du polygone hachuré en rouge et du rectangle hachuré en gris, on obtient le bon encadrement de l'aire du domaine grisé.
   > Attention: chaque carreau a une aire égale à $0,5$ unité d'aire.

6. • Une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ sur $[1;4]$ peut être la fonction $x \mapsto 2ln(x)$, car $(2ln(x))' = \dfrac{2}{x}$.

   • Une primitive de la fonction $x \mapsto e^{-2x+8}$ sur $[1;4]$ peut être la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{-2}e^{-2x+8} = -\dfrac{1}{2}e^{-2x+8}$, car $(\dfrac{1}{-2}e^{-2x+8})' = \dfrac{1}{-2} \times -2 \times e^{-2x+8} = e^{-2x+8}$.

   Par conséquent, on en déduit qu'une primitive de la fonction sur $[1;4]$ $x \mapsto \dfrac{2}{x} + e^{-2x+8}$ peut être la fonction $x \mapsto 2ln(x) - \dfrac{1}{-2}e^{-2x+8} = 2ln(x) + \dfrac{1}{2}e^{-2x+8}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{2}{x} + e^{-2x+8}\,dx &= \left[2ln(x) + \frac{1}{2}e^{-2x+8}\right]_1^4 \\
&= \left((2ln(4) + \frac{1}{2}e^{-2\times4+8}) - (2ln(1) + \frac{1}{2}e^{-2\times1+8})\right) \\
&= 2ln(4) + \frac{1}{2}e^{-8+8} - 2\times 0 - \frac{1}{2}e^{-2+8} \\
&= 2ln(4) + \frac{1}{2}e^{0} - \frac{1}{2}e^{6} \\
&= 2ln(4) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{6}
\end{aligned}$$

Exercice 2 (......../5 points)

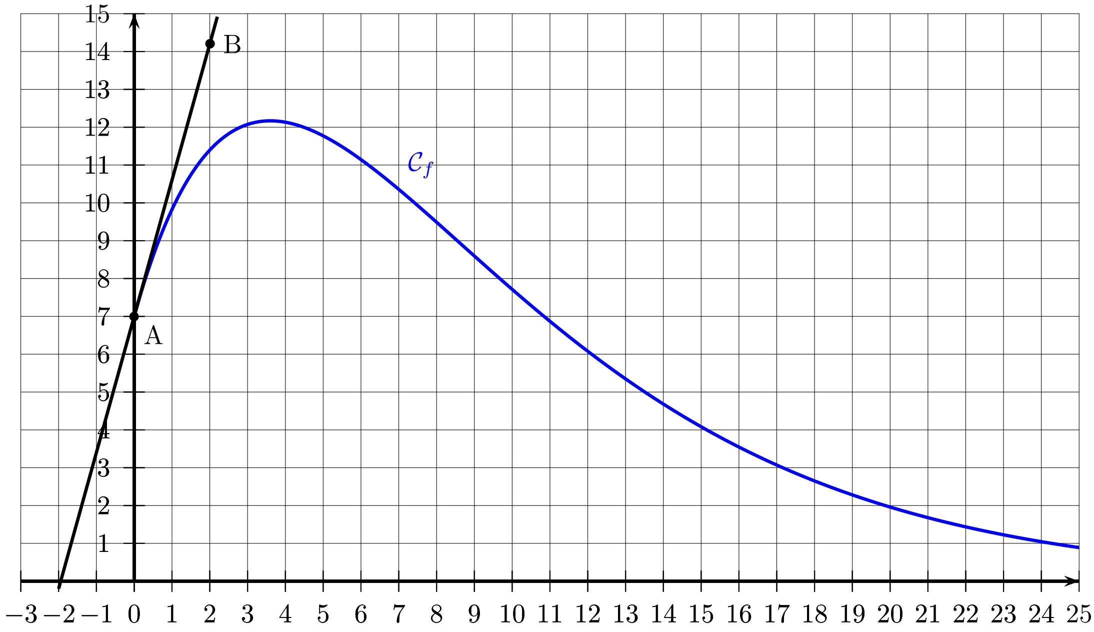
Partie A

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ 25]$ par :

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où a et b sont deux nombres réels.

On a représenté également sa tangente T au point A(0 ; 7). T passe par le point B(2 ; 14,2).



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.
2. a) Déterminer, par un calcul. le coefficient directeur de la droite T.
   b) Exprimer, pour tout $x \in [0\ ;\ 25]$, $f'(x)$ en fonction de a et b.
   c) Montrer que a et b sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{rcr} a-0,2b & = & 3,6 \\ b & = & 7 \end{array}\right.$$

   En déduire la valeur de a.

Partie B

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 25]$ par

$$f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

   Justifier.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ 25]$.
   Donner une valeur approchée au dixième de α.
3. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant.

`Dériver` $((-25x-160)\mathrm{e}^{-0,2x}$
$(5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$

   Exploiter ce résultat pour donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millième de $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$.

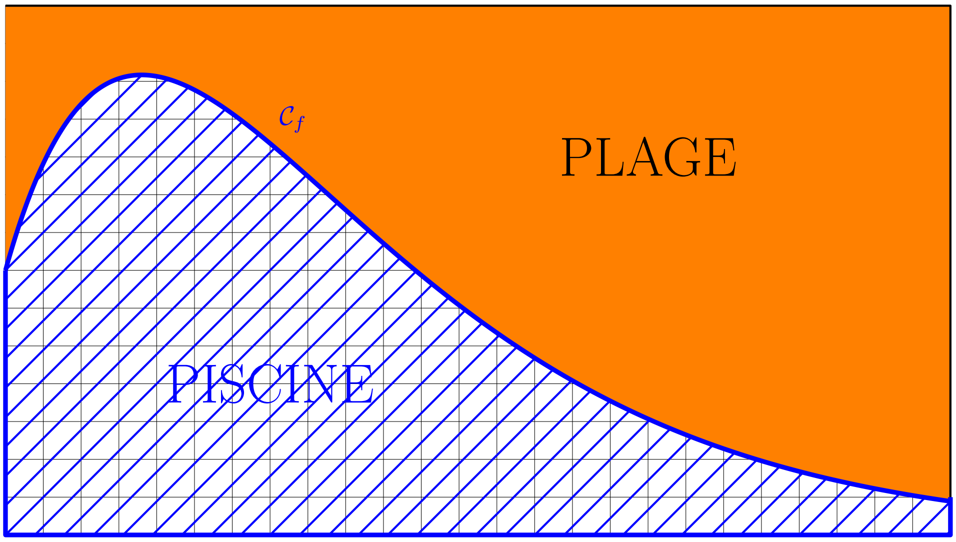
Partie C

Un organisme de vacances souhaite ouvrir un nouveau centre avec une piscine bordée de sable. Il dispose d'un espace rectangulaire de 25 mètres de longueur sur 14 mètres de largeur et souhaite que la piscine et la plage se partagent l'espace comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

La bordure est modélisée par la fonction f étudiée dans la partie précédente.

1. Quelle est l'aire en m^2 de la zone hachurée représentant la piscine ?
2. L'organisme décide de remplacer cette piscine par une piscine rectangulaire de 25 mètres de longueur et de même superficie.

   Quelle en sera la largeur arrondie au dixième de mètre?



Solution :

1. Dans la limite de précision du graphique, l'équation $f(x) = 6$ admet comme solution $\alpha \approx 12$.
2. a) Cherchons la pente de la droite T passant par A et B : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{14,2-7}{2-0} = 3,6$.

   b) On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;25]$. Pour tout $x \in [0\,;5]$, $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (ax+b)$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$.
   En écrivant $u'(x) = a$ et $v'(x) = -0,2\mathrm{e}^{-0,2x}$,
   $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{-0,2x} + (ax+b) \times -0,2\mathrm{e}^{-0,2x} = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(a + (ax+b) \times -0,2)$
   $= \mathrm{e}^{-0,2x}\,(a - 0,2ax - 0,2b) = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(-0,2ax + a - 0,2b)$

c) Nous savons que $A \in \mathcal{C}_f$ donc $f(0) = 7$. De plus D'après la question 2.a), $f'(0) = 3,6$.
La première égalité se traduit par : $(a \times 0 + b)\mathrm{e}^{-0.2\times 0} = 7 \iff b = 7$
La seconde donne quant à elle : $\mathrm{e}^{-0,2\times 0}\,(-0,2a \times 0 + a - 0,2b) = 3,6 \iff a - 0,2b = 3,6$
Donc : $\begin{cases} a - 0,2\,b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$
On remplace b par 7 dans la première équation, puis on trouve : $\begin{cases} a &= 3,6 + 0,2 \times 7 = 5 \\ b &= 7 \end{cases}$.
Donc la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ par $f(x) = (5x + 7)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

Partie B

1. Utilisons les résultats de la première partie. Pour tout $x \in [0\,;\,25]$,
$f'(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(-0,2ax + a - 0,2b) = \mathrm{e}^{-0,2x}\,(-0,2 \times 5 \times x + 5 - 0,2 \times 7) = (-x + 3,6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
Pour tout $x \in [0\,;\,25]$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $-x + 3,6$.
$-x + 3,6 \geqslant 0 \iff x \leqslant 3,6$.
Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,25]$ est :

x	0		$3,6$		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	↗	$25\mathrm{e}^{-0,72}$	↘	$132\mathrm{e}^{-5}$

$f(0) = 7$ $\quad f(3,6) = (5 \times 3,6 + 7)\mathrm{e}^{-0,2\times 3,6} = 25\mathrm{e}^{-0,72} \approx 12,17$ $\quad f(25) = (5 \times 25 + 7)\mathrm{e}^{-0,2\times 25} = 132\mathrm{e}^{-5} \approx 0,89$

2. Sur l'intervalle $[0\,;\,3,6]$, $f(x) \geqslant 7$ donc l'équation $f(x) = 6$ n'y admet aucune solution.
Sur l'intervalle $[3,6\,;\,25]$, la fonction f est continue et strictement décroissante.
De plus $6 \in [132\mathrm{e}^{-5}\,;\,25\mathrm{e}^{-0,72}]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[3,6\,;\,25]$. À l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx 12,1$.
Pour conclure, l'équation $f(x) = 6$ admet donc une solution unique $\alpha \approx 12,1$ sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.

3. Le logiciel de calcul donne une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,25]$.
Donc $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[(-25x - 160)\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} = -785\mathrm{e}^{-5} + 160 \approx 154,711$

Partie C

1.

2. D'après les questions de la partie précédente, l'aire de la partie hachurée représentant la piscine est égale en unités d'aires à : $\displaystyle\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$ soit $-785\mathrm{e}^{-5} + 160$. Or ici une unité d'aire est égale à un mètre carré, donc $A = -785\mathrm{e}^{-5} + 160\ m^2 \approx 154,711\ m^2$.

3. Cherchons la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,25]$:
$\displaystyle\frac{1}{25 - 0}\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-785\mathrm{e}^{-5} + 160}{25} \approx 6,2.$
L'aire de la partie hachurée est donc égale à l'aire d'un rectangle ayant pour longueur 25, et pour hauteur 6,2. Donc si on remplace la piscine par un bassin rectangulaire ayant la même aire, ses dimensions seraient : $25\,m \times 6,2\,m$.

Exercice 3 (......../5 points)

Victor a téléchargé un jeu sur son téléphone. Le but de ce jeu est d'affronter des obstacles à l'aide de personnages qui peuvent être de trois types: Terre , Air ou Feu .

Au début de chaque partie, Victor obtient de façon aléatoire un personnage d'un des trois types et peut, en cours de partie, conserver ce personnage ou changer une seule fois de type de personnage.

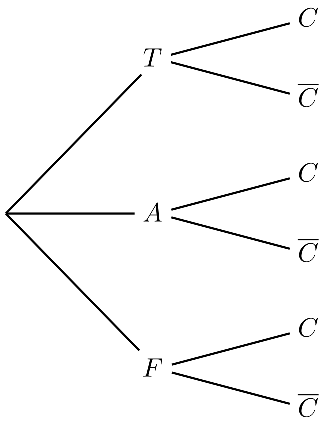
Le jeu a été programmé de telle sorte que :

- la probabilité que la partie débute avec un personnage de type Terre est $0,3$;
- la probabilité que la partie débute avec un personnage de type Air est $0,5$;
- si la partie débute avec un personnage de type Terre , la probabilité que celui-ci soit conservé est $0,5$;
- si la partie débute avec un personnage de type Air, la probabilité que celui-ci soit conservé est $0,4$;
- si la partie débute avec un personnage de type Feu , la probabilité que celui-ci soit conservé est $0,9$.

On note les évènements suivants :

- T : la partie débute avec un personnage de type Terre ;
- A : la partie débute avec un personnage de type Air ;
- F : la partie débute avec un personnage de type Feu ;
- C : Victor conserve le même personnage tout au long de la partie.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que Victor obtienne et conserve un personnage de type Air .
3. Justifier que la probabilité que Victor conserve le personnage obtenu en début de partie est $0,53$.
4. On considère une partie au cours de laquelle Victor a conservé le personnage obtenu en début de partie. Quelle est la probabilité que ce soit un personnage de type Air ?

Partie B

On considère 10 parties jouées par Victor, prises indépendamment les unes des autres. On rappelle que la probabilité que Victor obtienne un personnage de type Terre est $0,3$.

Y désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de personnages de type Terre obtenus au début de ses 10 parties.

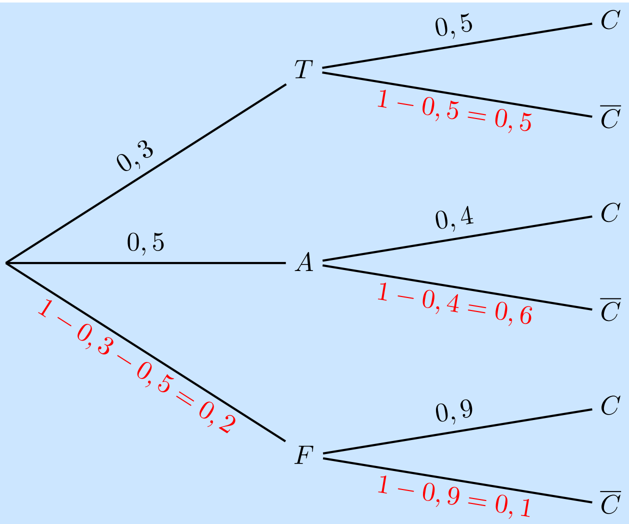
1. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu exactement 3 personnages de type Terre au début de ses 10 parties.
3. Calculer la probabilité que Victor ait obtenu au moins une fois un personnage de type Terre au début de ses 10 parties.

Solution :

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. Ci-dessous, l'arbre de probabilités complété :



2. $P(A\cap C)=P_A(C)\times P(A)=0,4\times 0,5=0,20$.
3. Formule des probabilités totales :
$P(C)=P(T\cap C)+P(A\cap C)+P(F\cap C)=P_T(C)\times P(T)+P_A(C)\times P(A)+P_F(C)\times P(F)$
$=0,3\times 0,5+0,5\times 0,4+0,2\times 0,9=0,53$.
4. D'après les questions 2 et 3 : $P_C(A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(C)}=\dfrac{0,2}{0,53}\approx 0,38$.

Partie B

1. On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 10 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,3$.
2. $P(Y=3)=\dbinom{10}{3}\times 0,3^3\times(1-0,3)^{10-3}\approx 0,27$.
3. $P(Y\geqslant 1)=1-P(Y<1)=1-P(Y=0)=\dbinom{10}{0}\times 0,3^0\times(1-0,3)^{10-0}=1-(1-0,3)^{10}\approx 0,97$.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui ne suivent PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ.

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n) le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017+n$.

1. a) Avec ce modèle. vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 sera de 318.
   b) Justifier que, pour tout entier $n\in N$, $u_{n+1}=1,12u_n-18$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que ... faire
        U ← ...
        N ← ...
Fin Tant que
```

3. On définit la suite (v_n) par : $v_n=u_n-150$ pour tout $n\in N$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$.
Préciser son terme initial.

b) Exprimer, pour tout $n \in N$, v_n en fonction de n.
En déduire u_n en fonction de n.

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier.
Que peut-on en déduire?

4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation :

$$150 + 1,12^n \times 150 > 600.$$

b) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.

5. En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement: afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.
En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?
Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Solution :

1. a) Augmenter de 12 % revient à multiplier par $1,12$.
Donc en 2018, il y aura : $300 \times 1,12 - 18 = 318$ loups.

b) Pour tout entier naturel n, on note par u_n et u_{n+1} les nombres respectifs de loups les années n et $n+1$. D'après le texte, d'une année à l'autre le nombre de loups augmente de 12 %, puis on autorise à tuer 18 animaux.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,12 \times u_n - 18$.

2. Ci-dessous l'algorithme complété :

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U < 600 faire
        U ← 1,12 × U − 18
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

3. a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 1,12 \times u_n - 18 - 150 = 1,12 \times u_n - 168$
$= 1,12 \times \left(u_n - \dfrac{168}{1,12}\right) = 1,12(u_n - 150) = 1,12 \times v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 150$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 150 \times 1,12^n$.
Or $u_n = v_n + 150$ donc $u_n = 150 \times 1,12^n + 150$.

c)
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,12^n = +\infty$, car la suite est de la forme q^n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, si $q > 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 150 = 150$, car c'est une suite constante qui ne dépend pas de n.

Comme :
- La limite d'un produit est le produit des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times 1,12^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times \lim\limits_{n\to+\infty} 1,12^n = +\infty$.
- La limite d'une somme est la somme des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times 1,12^n + 150 = \lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times 1,12^n + \lim\limits_{n\to+\infty} 150 = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Ainsi, chaque année, le nombre de loups ne cesse de croître.

4. a) $150 \times 1,12^n + 150 \geqslant 600 \iff 150 \times 1,12^n \geqslant 450 \iff 1,12^n \geqslant 3 \iff \ln(1,12^n) \geqslant \ln(3)$
$\iff n \times \ln(1,12) \geqslant \ln(3) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(3)}{\ln(1,12)}$. or $\dfrac{\ln(3)}{\ln(1,12)} \approx 9,69$ donc $n \geqslant 10$.

b) En 2027, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

5. À l'aide d'un tableau et de la calculatrice, nous pouvons déterminer le nombre de loups après 2023 en utilisant le même mode de croissance annuelle mais avec un prélèvement annuel de 35.

Année	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
n'	0	1	2	3	4	5	6	7
Population $w_{n'}$	446	$464,52$	$\approx 485,26$	$\approx 508,49$	$\approx 534,51$	$\approx 563,65$	$\approx 596,29$	$\approx 632,84$

Donc en 2030 le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

Exercice 4 (......../5 points)

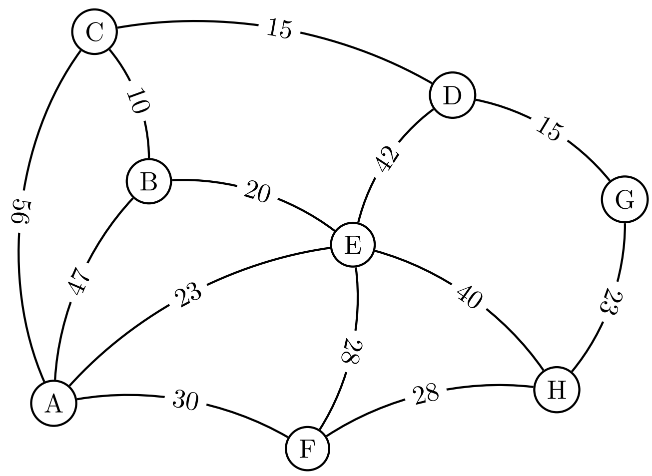
A traiter pour ceux qui suivent L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ.

Les différentes parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail.

Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de $0,53$;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de $0,78$.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018.

Pour tout entier naturel n, on note :

- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1er janvier 2018;
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;

La matrice ligne $P_n = (c_n \quad t_n)$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1er janvier 2018.

Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. a) Préciser l'état probabiliste initial P_0.
   b) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera C et T ses deux sommets :
      - C pour indiquer que Louis utilise le covoiturage ;
      - T pour indiquer que Louis utilise les transports en commun.

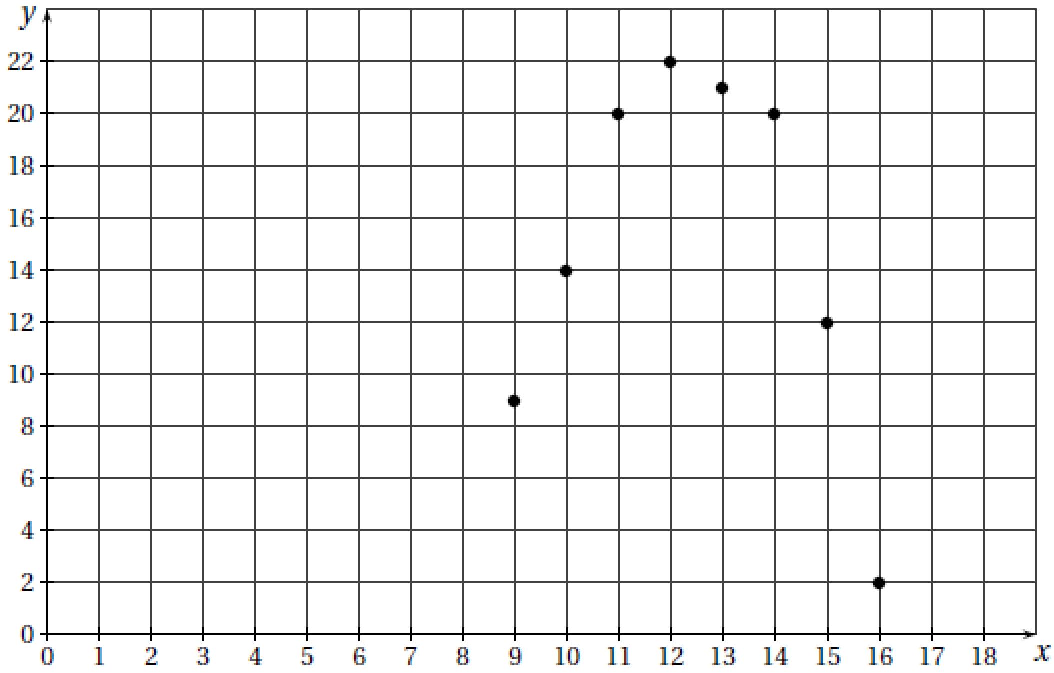
2. Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Partie C

Louis a aussi envisagé de prendre le bus pour faire le trajet à partir de la station de bus la plus proche de chez lui. Une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente avant l'arrivée du bus, en minutes en fonction de l'heure.

Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h.

On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie. On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui, à l'heure, associe la durée d'attente en minutes.

Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.

On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c des réels et a non nul telle que les trois points $(9; 9)$, $(11; 20)$ et $(16; 2)$ appartiennent à la représentation graphique de f.

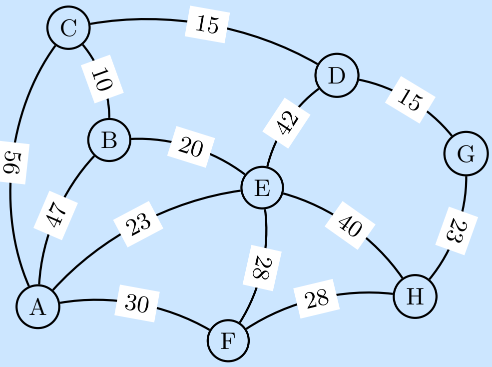
1. Calculer les trois réels a, b et c.
2. Combien aurait-il de minutes d'attente le matin à 8h30 ?

Solution :

Partie A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Louis est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail.

Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



On détermine le chemin le plus court qui permet à Louis de relier son domicile à son travail en utilisant l'algorithme de Dijkstra:

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	47 A	56 A	∞	23 A	30 A	∞	∞	E
	47 A 43 E	56 A	65 E		30 A 51 E	∞	63 E	F
	43 E	56 A	65 E			∞	63 E 58 F	B
		56 A 53 B	65 E			∞	58 F	C
			65 E 68 C			∞	58 F	H
			65 E			81 H		D
						81 H 80 D		G

Le chemin le plus court pour aller de A à G est: A $\xrightarrow{23}$ E $\xrightarrow{42}$ D $\xrightarrow{15}$ G; sa longueur est de 80 km.

Partie B

> *Remarque: pour la cohérence de cette partie, il convient de considérer que Louis ne fait qu'un trajet par jour ou qu'il garde le même mode de transport tout au long d'une journée.*

Afin de réduire son empreinte énergétique, Louis décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de $0,53$;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de $0,78$.

Louis décide de mettre en place ces résolutions au 1er janvier 2018.

Pour tout entier naturel n, on note :

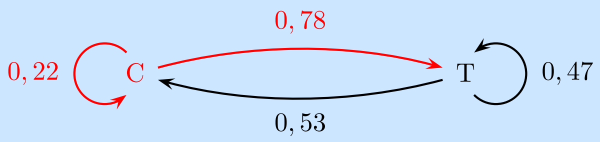
- c_n la probabilité que Louis utilise le covoiturage n jour(s) après le 1er janvier 2018;
- t_n la probabilité que Louis utilise les transports en commun n jour(s) après le 1er janvier 2018 ;

La matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix}$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1er janvier 2018.

Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage.

1. a) Le 1er janvier 2018, Louis décide d'utiliser le covoiturage, donc $c_0 = 1$, $t_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T:



2. Le graphe précédent est équivalent au système: $\begin{cases} c_{n+1} &= 0,22\, c_n + 0,53\, t_n \\ t_{n+1} &= 0,78\, c_n + 0,47\, t_n \end{cases}$

   qui s'écrit sous forme matricielle: $\begin{pmatrix} c_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$

   La matrice de transition du graphe probabiliste est donc $M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$.

3. $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \end{pmatrix}$

   $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}461\,8 & 0{,}538\,7 \end{pmatrix}$

   On peut donc dire qu'au bout de 2 jours, la probabilité que Louis a d'utiliser le covoiturage est de 0,461 8 soit $46,18\,\%$, et celle d'utiliser les transports en commun de 0,538 7 soit $53,87\,\%$.

Partie C :

1. Comme les trois points $(9;9)$, $(11;20)$ et $(16;2)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction f, on en déduit que :

   $f(9) = 9$; $f(11) = 20$; $f(16) = 2$.

   Par conséquent :

   $f(9) = a \times 9^2 + b \times 9 + c = 81a + 9b + c = 9$; $f(11) = a \times 11^2 + b \times 11 + c = 121a + 11b + 20$ $f(16) = a \times 16^2 + b \times 16 + c = 256a + 16b + c = 2$

   On obtient alors un système de trois équations à trois inconnues.

$$\begin{cases} 81a + 9b + c &= 9 \\ 121a + 11b + c &= 20 \\ 256a + 16b + c &= 2 \end{cases}$$

   Qui se modélise par le calcul matriciel suivant :

   $\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Or $\begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible, qui admet comme matrice inverse d'après la calculatrice :

   $\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35} \\ -\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} \\ \frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35} \end{pmatrix}$

   et

   $\begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{35} \\ -\frac{27}{14} & \frac{5}{2} & -\frac{4}{7} \\ \frac{88}{7} & -\frac{72}{5} & \frac{99}{35} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{10} \\ \frac{63}{2} \\ -\frac{846}{5} \end{pmatrix}$

   On en déduit que $a = -\dfrac{13}{10}$, $b = \dfrac{63}{2}$, $c = -\dfrac{846}{5}$ et que f est définie par $f(x) = -\dfrac{13}{10}x^2 + \dfrac{63}{2}x - \dfrac{846}{5}$.

2. Si le temps d'attente suit le modèle, le temps d'attente à 8h30 correspond à l'image de 8,5 par la fonction f.

   $f(8,5) = 4,625$ et $0,625 \times 60 = 37,5$. Le temps d'attente sera d'environ 4 minutes et 38 secondes à 8h30.