Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 1

Note

...../20

Exercice 1 (......../5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. On considère la suite (k_n) telle que $k_n = 5^n + 2$.
   Affirmation : La suite (k_n) est une suite géométrique.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison 3 et de premier terme égal à 8.
   Affirmation : Le 15-ème terme de la suite (u_n) est égal à 38263752.
3. La suite géométrique (v_n) est définie par la relation de récurrence suivante : $v_{n+1} = 0,5v_n$ et $v_0 = 500$

   Affirmation : La somme des 5 premiers termes de la suite (v_n) est égal à 1 937,5.
4. Soit (w_n) une suite géométrique définie par la relation de récurrence suivante : $w_{n+1} = 2w_n$ et $w_0 = 4$.
   Affirmation : La forme explicite de la suite (w_n) est de la forme $w_n = 2 \times 4^n$.
5. Soit (z_n) une suite géométrique définie sous sa forme explicite par : $z_n = -2 \times 0,5^n$.
   Affirmation : $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = -\infty$

Solution :

1. Faux. $k_0 = 2$, $k_1 = 7$, $k_2 = 27$, $\dfrac{k_1}{k_0} = \dfrac{7}{2} = 3,5$ et $\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{27}{7} \approx 3,85$. Pour tout n entier naturel, le rapport $\dfrac{k_{n+1}}{k_n}$ n'est pas constant. Par conséquent, la suite (k_n) n'est pas géométrique.
2. Vraie. La forme explicite de la suite (u_n) est de la forme : $u_n = 8 \times 3^n$. Le 15ème terme est le terme u_{14}. $u_{14} = 8 \times 3^{14} = 38263752$.
3. Faux. $v_0 + v_1 + ... + v_4 = v_0 \times \dfrac{1 - q^{4+1}}{1 - q} = 500 \times \dfrac{1 - 0,5^5}{1 - 0,5} = 968,75$.
4. Faux. Par identification, $w_0 = 4$ et $q = 2$. La forme explicite de la suite (w_n) est définie par $w_n = w_0 \times q^n = 4 \times 2^n$.
5. Faux. $\lim\limits_{n \to +\infty} -2 = -2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, car $0 < q < 1$. La limite d'un produit est le produit des limites, par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -2 \times 0,5^n = \lim\limits_{n \to +\infty} -2 \times \lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = -2 \times 0 = 0$

Exercice 2 (......../9 points)

Pour respecter une nouvelle norme antipollution, un groupe industriel s'engage à réduire chaque année sa quantité de rejets polluants de 6 %.

En 2015, la quantité de rejets polluants était de 50 000 tonnes.

1. Quel a été la quantité de rejets polluants en 2017 ?
2. Pour tout entier naturel n, on note r_n la quantité, en tonnes, de rejets polluants pour l'année $(2015 + n)$.

   On a donc $r_0 = 50\,000$.

   a) En justifiant, exprimer r_{n+1} en fonction de r_n. En déduire la nature de la suite (r_n).

   b) Donner l'expression de r_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (r_n).
4. La direction du groupe industriel souhaite connaître l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin de déterminer au bout de combien d'années la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.

   ```
   R ← 50 000
   N ← 0
   Tant que R ... faire :
      R ← ...
      N ← N + 1
   Fin Tant que
   Afficher N
   ```

   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable N calculée par cet algorithme. En déduire l'année à partir de laquelle, la quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60 %.
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ et interpréter le résultat.

Solution :

1. En 2015, la quantité de rejets polluants est de 50 000 tonnes. En 2016, la quantité de rejets polluants est de $50000 \times \left(1 - \dfrac{6}{100}\right) = 50000 \times 0,94 = 47000$ tonnes. En 2017, la quantité de rejets polluants est de $47000 \times \left(1 - \dfrac{6}{100}\right) = 47000 \times 0,94 = 44180$ tonnes.
2. a) Pour tout n entier naturel, entre l'année n et l'année $n+1$, la quantité de rejets polluants diminue de 6%. Par conséquent $r_{n+1} = \left(1 - \dfrac{6}{100}\right) \times r_n = 0,94 \times r_n$.

   On constate que la suite (r_n) est une suite de la forme $r_{n+1} = q \times r_n$. C'est la forme récurrente d'une suite géométrique. Par identification, on en déduit que $q = 0,94$. D'après l'énonce $r_0 = 50000$.

   Ainsi (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison $q = 0,94$.

   b) Comme (r_n) est une suite géométrique avec $r_0 = 50000$ et $q = 0,94$, elle admet comme forme explicite :
   $$r_n = r_n \times q^n = 50000 \times 0,94^n$$
3. $r_{n+1} - r_n = 50000 \times 0,94^{n+1} - 50000 \times 0,94^n = 50000 \times 0,94^n \times 0,94 - 50000 \times 0,94^n = 50000 \times 0,94^n(0,94-1) = 50000 \times 0,94^n \times (-0,06) = 50000 \times (-0,06) \times 0,94^n = -3000 \times 0,94^n$.

   - $-3000 < 0$;
   - pour tout n entier naturel, $0,94^n > 0$;

   Par conséquent, pour tout n entier naturel, $-3000 \times 0,94^n < 0$. Ainsi, $r_{n+1} - r_n < 0$. On en déduit donc que la suite (r_n) est décroissante.

4. a) Diminuer de 60% la quantité de rejets polluants revient à obtenir $50000 \times \left(1 - \frac{60}{100}\right) = 50000 \times 0,4 = 20000$ tonnes de rejets polluants. Ainsi :

```
R ← 50 000
N ← 0
Tant que R> 20 000 faire :
   R ← R × 0,94
   N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

b) A la calculatrice, on constate que $r_{14} = 21026,16$ et que $r_{15} = 19764,59$. Ainsi, la valeur de la variable N calculée par cet algorithme est égale à 15.

La quantité de rejets polluants aura diminué d'au moins 60% à partir de l'année 2015+15, c'est-à-dire à partie de l'année 2030.

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 50000 \times 94^n$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 50000 = 50000$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,94^n = 0$, car $0 < q < 1$.

La limite d'un produit est le produit des limites, par conséquent :

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 50000 \times 0,94^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 50000 \times \lim\limits_{n\to+\infty} 0,94^n = 50000 \times 0 = 0$.

Si la diminution des rejets polluants suit cette cadence. A l'avenir, la quantité des rejets polluants sera quasi nulle.

Exercice 3 (......../4 points)

On considère une suite (u_n), où chacun de ses termes sont stockés dans une variable U de l'algorithme suivant :

```
U ← 25 000
N ← 0
Tant que U > 10000
   U ← U × 0,85 + 100
   N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

U	25 000	21 350	....	
N	0	1	...	
Test : U > 10 000	Vrai	Vrai	...	

2. Quel nombre obtient-on en sortie d'algorithme ?
3. En observant la ligne : $U \leftarrow U \times 0,85 + 100$ de l'algorithme.
   a) Déterminer *la forme de récurrente/la formule de récurrence* de la suite (u_n).
   b) Est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

Solution :

1.

U	25 000	21 350	18 247,5	15 610,38	13 368,82	11 463,5	9 843,972
N	0	1	2	3	4	5	6
Test : U > 10 000	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. L'algorithme affiche en sortie la valeur de la variable N qui est égale à 6.

3. a) La forme récurrente de la suite de (u_n) est définie par $u_{n+1} = 0,85u_n + 100$.
   b) Cette suite n'est pas arithmétique, car elle n'est pas de la forme $u_{n+1} = u_n + r$.
   Cette suite n'est pas géométrique, car elle n'est pas de la forme $u_{n+1} = qu_n$.

Exercice 4 (......../2 points)

(u_n) est une suite géométrique à termes positifs telle que $u_5 = 5$ et $u_7 = \dfrac{125}{9}$.

Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

Solution :

On sait que (u_n) est une suite géométrique, il existe donc q un réel strictement positif, la raison de la suite (u_n) et u_0 un réel, le premier terme de la suite (u_n); tel que :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Ainsi, on sait que :

$$u_6 = qu_5$$
$$u_7 = qu_6$$

On en déduit que : $u_7 = qu_6 = q(qu_5) = q \times q \times u_5 = q^2 u_5$.

Étape 1 : Déterminons q, la raison de la suite (u_n).

$$u_7 = q^2 u_5$$
$$\frac{u_7}{u_5} = q^2$$
$$\frac{\frac{125}{9}}{5} = q^2$$
$$\frac{125}{45} = q^2$$
$$\frac{25}{9} = q^2$$
$$\sqrt{\frac{25}{9}} = q$$
$$q = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}$$
$$q = \frac{5}{3}$$

La raison q de la suite (u_n) est égale à $\dfrac{5}{3}$.

Étape 2 : Déterminons u_0, le premier de la suite (u_n).

On sait que la forme explicite de la suite (u_n) est de la forme : $u_n = u_0 \times q^n =$ et comme $q = \dfrac{5}{3}$, on a alors : $u_n = u_0 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$.

D'après l'énoncé $u_5 = 5$ et $u_5 = u_0 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^5$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} u_0 \times \left(\frac{5}{3}\right)^5 &= 5 \\ u_0 \times \frac{3125}{243} &= 5 \\ u_0 &= \frac{5}{\frac{3125}{243}} \\ u_0 &= \frac{243}{625} \end{aligned}$$

Ainsi, le premier de la suite (u_n), u_0 est égal à $\dfrac{243}{625}$.

Conclusion :

Comme (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{243}{625}$ et de raison $q = \dfrac{5}{3}$, on déduit que sa forme explicite :

$$u_n = \frac{243}{625} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$\sim$