Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 2

Note

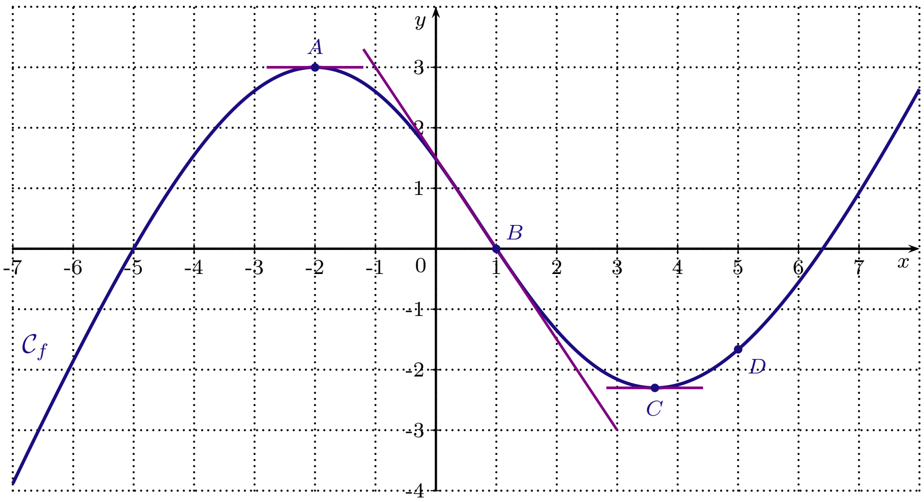
...../20

Exercice 1 (......../5 points)

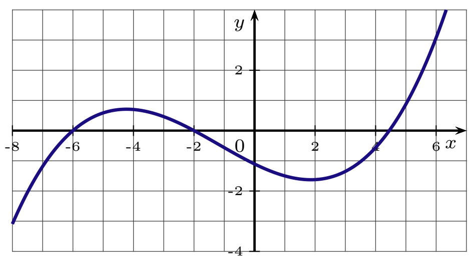
Soit f une fonction définie et dérivable sur $[-7;8[$. On note f' la dérivée de la fonction f.

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f.

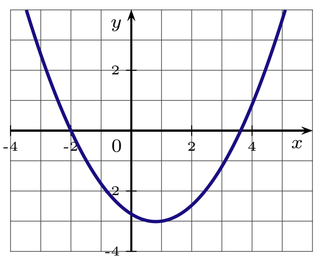
La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B passe par le point de coordonnées $(3;-3)$.



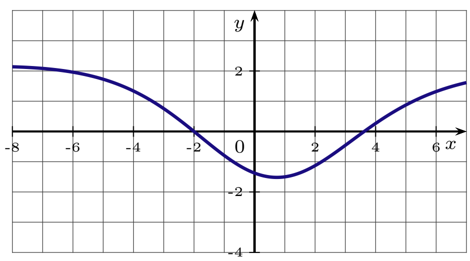
1. À partir du graphique et des données de l'énoncé :
   a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$.
   b) Déterminer $f'(1)$.
2. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D_2 d'abscisse 5 a pour équation $y = \frac{7}{8}x - \frac{145}{24}$. En déduire la valeur de $f'(5)$.
3. La proposition $f'(0) > 1$ est-elle vraie ou fausse ? (Justifier votre réponse)
4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle. (Justifier votre réponse)



Courbe $\mathcal{C}'_1$



Courbe $\mathcal{C}'_2$



Courbe $\mathcal{C}'_3$

Solution :

1. a) On observe deux tangentes horizontales sur $[-7;8[$ aux points A et B. On en déduit que l'équation $f'(x)=0$ admet deux solutions.

   b) On considère le point $E(3;-3)$. E appartient à la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1. Par conséquent :
$$f'(1)=\frac{y_B-y_E}{x_B-x_E}=\frac{0-(-3)}{1-3}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}$$

2. $f'(5)=\dfrac{7}{8}$.

3. L'affirmation est fausse. La tangente au point d'abscisse 0 est décroissante. Par conséquent, le coefficient directeur de la tangente a une valeur négative et donc $f'(0)<0$.

4. Avec les variations de la fonction f, on en déduit le signe de f'.

x	-7		-2		3.5		8
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

.

La courbe de la fonction f' ne peut donc pas être la courbe $\mathcal{C}'_1$.

On sait que d'après la question 1.b) que $f'(1)=-1,5$. Par conséquent, la fonction f' ne peut donc pas être la courbe $\mathcal{C}'_2$.

Conclusion : la courbe représentative de f' est la courbe $\mathcal{C}'_3$.

Exercice 2 (......../7 points)

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année $2018+n$. On a ainsi $u_0=300$.

1. a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=0,96u_n+22$.

   b) Estimer le nombre de pommiers par hectare, arrondi à l'unité, en 2020.

2. Laurence veut savoir à partir de quelle année la densité de pommiers dépassera 400 pommiers par hectare. Pour cela on utilise l'algorithme suivant:

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U ...
        N ← N + 1
        U ← ...
Fin Tant que
```

   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus pour qu'il détermine le rang de l'année cherchée.

   b) Quelle est la valeur de N en sortie d'algorithme?

3. On définit la suite (v_n) en posant $v_n=u_n-550$ pour tout entier naturel n.

   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n puis démonter que:
$$u_n=550-250\times 0,96^n.$$

   c) Estimer le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2025.

4. Déterminer le plus petit entier n tel que : $u_n>500$.

5. Déterminer la $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter le résultat.

Solution :

En 2018, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4 % des pommiers existants et replantera 22 nouveaux pommiers par hectare.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare l'année $2018+n$. On a ainsi $u_0 = 300$.

1. a) Soit u_n le nombre de pommier par hectare l'année n ; l'année suivante supprimer 4 % revient à multiplier u_n par $1 - \dfrac{4}{100} = 1 - 0,04 = 0,96$.
   Il restera donc $0,96 \times u_n$ et en plantant 22 pommiers il y aura donc l'année $n+1$:
   $$u_{n+1} = 0,96u_n + 22.$$
   b) • En 2019, $n = 1$, donc $u_1 = 0,96u_0 + 2 = 0,96 \times 300 + 22 = 288 + 22 = 310$;
   • En 2020, $n = 2$, donc $u_2 = 0,96u_1 + 22 = 0,96 \times 310 + 22 = 297,6 + 22 = 319,6$ soit 320 pommiers à l'unité près.

2.

   a)

   ```
   N ← 0
   U ← 300
   Tant que U< 400
           N ← N + 1
           U ← 0,96 × U + 22
   Fin Tant que
   ```

   b) Sur une calculatrice, on obtient $N = 13$.

3. a) • Montrons que (v_n) est une suite géométrique.
   Comme $v_n = u_n - 550$, on en déduit $u_n = v_n + 550$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + 550$
   or
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,96u_n + 22 \\ v_{n+1} + 550 &= 0,96(v_n + 550) + 22 \\ v_{n+1} + 550 &= 0,96v_n + 0,96 \times 550 + 22 \\ v_{n+1} + 550 &= 0,96v_n + 528 + 22 \\ v_{n+1} + 550 &= 0,96v_n + 550 \\ v_{n+1} &= 0,96v_n \end{aligned}$$
   La suite (v_n) est de la forme $v_{n+1} = q \times v_n$, avec $q = 0,96$. On en déduit que la site (v_n) est une suite géometrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 300 - 550 = -250$.
   • Déterminons la forme explicite de (v_n).
   Comme (v_n) est une suite géométrique, on en déduit sa forme explicite.
   $v_n = v_0 \times q^n = -250 \times 0,96^n$.
   • Déterminons la forme explicite de (u_n).
   Comme $u_n = v_n + 550$ et que $v_n = -250 \times 0,96^n$.
   On en déduit que $u_n = 550 - 250 \times 0,96^n$
   b) 2025 correspond à $n = 7$.
   $u_7 = 550 - 250 \times 0,96^7 \approx 362,1$, donc 362 pommiers à l'unité près par hectare.
   Or l'exploitation de Laurence a une superficie de 14 hectares.
   Elle devrait donc avoir en 2025 :
   $14 \times u_7 = 14\left(550 - 250 \times 0,96^7\right) \approx 5\,069,9$ soit $5\,070$ pommiers à l'unité près.

4. A la calculatrice, on obtient : $u_{39} = 499,1234$ et $u_{40} = 501,1585$. Le plus petit entier n tel que $u_n > 500$ est pour $n = 40$.

5. • $\lim\limits_{n\to+\infty} 550 = 550$
   • $\lim\limits_{n\to+\infty} 250 = 250$
   • $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,96^n = 0$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ lorsque $0 < q < 1$ et $0 < 0,96 < 1$.

   Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 550-250\times0,96^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 550- \lim\limits_{n\to+\infty} 250\times \lim\limits_{n\to+\infty} 0,96^n = 550-250\times0 = 550$

   A terme, le nombre de pommiers par hectare devrait se stabiliser autour des 550 pommiers par hectare.

Exercice 3 (......../8 points)

Une entreprise fabrique des canapés d'angle et en vend au plus 50 par jour dans l'ensemble de ses magasins.

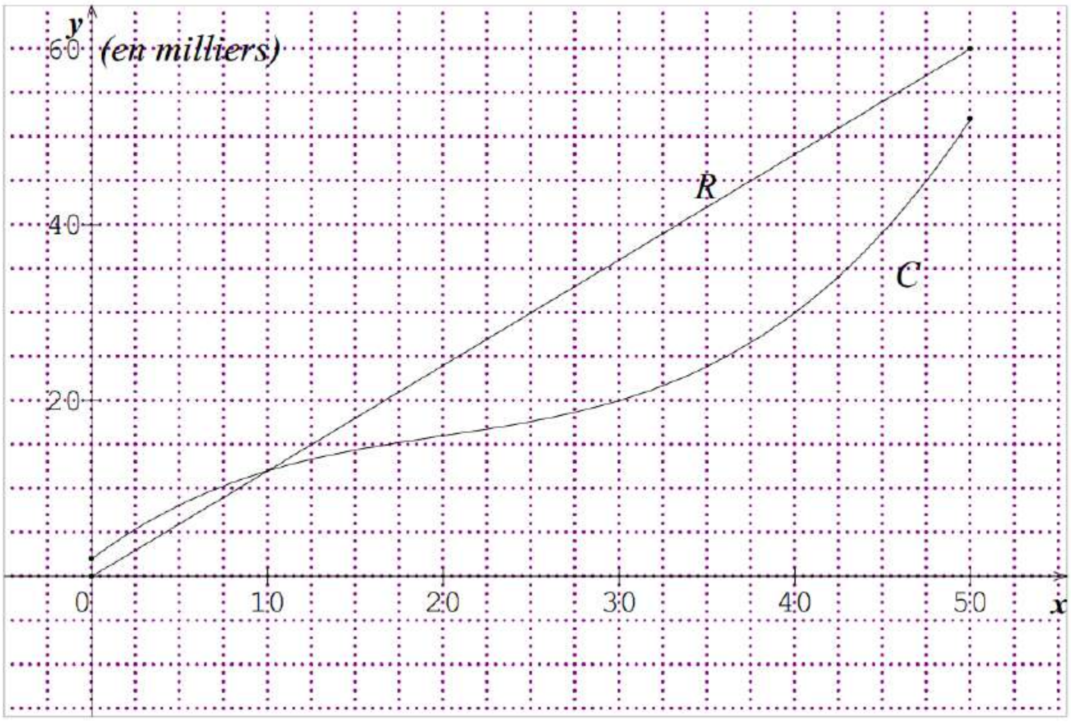
On estime que les coûts de production journaliers de x canapés, en euros, sont donnés par la fonction :

$$C(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 2000, \text{ avec } x \in [0; 50]$$

Chaque canapé est vendu 1200€. On appelle $R(x)$ la recette journalière, en euros, pour la vente de x canapés.

Partie A

On donne ci-dessous les représentations graphiques de la fonction coûts $\mathcal{C}$ et de la fonction recette $\mathcal{R}$.



Avec la précision permise par le graphique,

1. Donner une estimation des coûts de production lorsqu'on fabrique 25 canapés, puis du bénéfice réalisé si on vend ces 25 canapés.
2. Combien l'entreprise doit-elle produire et vendre au minimum de canapés pour ne pas être déficitaire. (justifier)
3. Déterminer la quantité de canapés à produire et à vendre pour que le bénéfice soit maximal. (expliquer votre démarche)

Partie B

1. Montrer que $B(x)$, le bénéfice journalier en euros pour x canapés vendus par jours est définie par la fonction :
$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 300x - 2000$$
2. a) Déterminer $B'(x)$, la fonction dérivée de la fonction $B(x)$.
   b) Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0; 50]$. (Arrondir les valeurs obtenues à 0,01 près).
   c) En déduire le sens de variation de la fonction B et dresser son tableau de variations sur $[0; 50]$.
   d) Déterminer la quantité de canapés à fabriquer et à vendre par jour pour réaliser le bénéfice maximal. Préciser le montant du bénéfice maximal.
3. a) Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 50]$.
   b) Calculer $B(10)$. En déduire le tableau de signes de $B(x)$ sur $[0; 50]$.
   c) Combien de canapés au minimum l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre par jour pour réaliser un bénéfice.

Solution :

Partie A :

1. Par lecture graphique $C(25) \approx 17,5$. Le coût de production pour 25 canapés est d'environ 17 500 €. Par lecture graphique $R(25) \approx 30$. $R(25) - C(25) \approx 30 - 17,5 \approx 12,5$. Le bénéfice réalisé par la vente de 25 canapés est d'environ 12 500 €.

2. Pour que l'entreprise ne soit déficitaire, il faut que $R(x) \geqslant C(x)$. C'est le cas lorsque $x \in [10; 50]$. L'entreprise doit fabriquer et vendre au moins 10 canapés pour ne pas être déficitaire.

3. Le bénéfice sera plus grand lorsque l'écart entre la droite représentative de la fonction R et la courbe de la fonction C sera plus grand. L'écart le plus grand entre les deux courbes s'observe lorsque $x = 37,5$. On peut estimer que pour 37 ou 38 canapés, fabriqués, vendus, l'entreprise réalise un bénéfice maximal.

Partie B :

1. Sur $[0; 50]$, $C(x) = x^3 - 60x^2 + 1500x + 2000$ et $R(x) = 1200x$. On en déduit l'expression de la fonction bénéfice $B(x)$ sur $[0; 50]$:

$$\begin{aligned}
B(x) &= R(x) - C(x) \\
&= 1200x - (x^3 - 60x^2 + 1500x + 2000) \\
&= 1200x - x^3 + 60x^2 - 1500x - 2000 \\
&= -x^3 + 60x^2 - 1500x + 1200x - 2000 \\
&= -x^3 + 60x^2 - 300x - 2000
\end{aligned}$$

1. a) $B'(x) = -3x^2 + 60 \times 2x - 300 = -3x^2 + 120x - 300$
   b) • Déterminons dans un premier temps les racines de la fonctions B'.
   B' est une fonction polynomiale du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, avec -3, $b = 120$, $c = -300$. On peut déduire ses racines à l'aide du discriminant.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 120^2 - 4 \times (-3) \times (-300) = 10800$.
   $\Delta > 0$, il y a donc 2 racines réelles, x_1 et x_2.
   $\sqrt{\Delta} = 60\sqrt{3}$
   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-120 + 60\sqrt{3}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-120 + 60\sqrt{3}}{-6} = 20 + 10\sqrt{3} \approx 37,32$
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-120 - 60\sqrt{3}}{2 \times (-3)} = \dfrac{-120 - 60\sqrt{3}}{-6} = 20 - 10\sqrt{3} \approx 2,67$
   • Déterminons le signe de B'
   Comme le terme du second degré de la fonction B' est négatif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		$20 - 10\sqrt{3}$		$20 + 10\sqrt{3}$		50
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Déterminons les variations de B.
  - $B'(x) < 0$ sur $[0; 20-10\sqrt{3}[\cup]20+10\sqrt{3}; 50]$; par conséquent la fonction $B(x)$ sera strictement décroissante sur $[0; 20-10\sqrt{3}[\cup]20+10\sqrt{3}; 50]$.
  - $B'(x) > 0$ sur $]20-10\sqrt{3}; 20+10\sqrt{3}[$; par conséquent la fonction $B(x)$ sera strictement croissante sur $]20-10\sqrt{3}; 20+10\sqrt{3}[$.

  On en déduit le tableau suivant :

x	0		$20-10\sqrt{3}$		$20+10\sqrt{3}$		50
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	-2000	$\searrow$	-2392	$\nearrow$	18392	$\searrow$	8000

c) D'après la question 2.a, la fonction B admet comme maximum environ 18 392 pour $x \approx 37,32$. Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice maximal d'environ 18 392 € pour 37 canapés fabriqués, vendus.

2. a)
- Sur $[0; 20-10\sqrt{3}]$, $B(x) < 0$. Par conséquent $B(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[0; 20-10\sqrt{3}]$.
- Sur $[20-10\sqrt{3}; 20+10\sqrt{3}]$, la fonction $B(x)$ est continue et strictement croissante. Ses images varient de $B(20-10\sqrt{3}) \approx -2392$ à $B(20+10\sqrt{3}) = 18392$. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $B(x) = 0$ admet une unique solution sur $[20-10\sqrt{3}; 20+10\sqrt{3}]$.
- Sur $[20+10\sqrt{3}; 50]$, $B(x) > 0$. Par conséquent $B(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[20+10\sqrt{3}; 50]$.

Ainsi $B(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 50]$. On appelle cette solution α.

D'après la calculatrice $\alpha = 10$.

b) $B(10) = 0$. Grâce aux réponses des questions 1.a) 2.a), on en déduit le tableau suivant :

x	0		$20-10\sqrt{3}$		$\alpha = 10$		$20+10\sqrt{3}$		50
$B(x)$	-2000	$\searrow$	-2392	$\nearrow$	0	$\nearrow$	18392	$\searrow$	8000
$B(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Ainsi $B(x) \geqslant 0$ sur $[10; 50]$.

c) Comme $B(x) \geqslant 0$ sur $[10; 50]$. L'entreprise doit fabriquer plus de 10 canapés par jour afin de réaliser un bénéfice.

∼