Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

$\sim$

Devoir 2

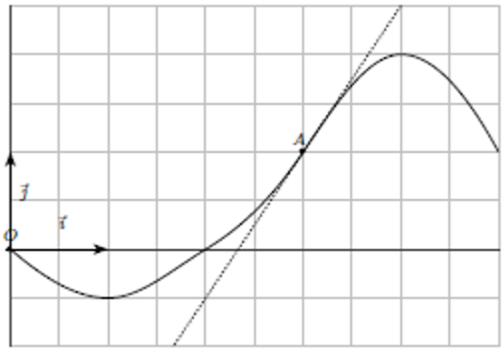
Note

...../20

Exercice 1 (......../2 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. Le courbe $\mathscr{C}_f$ (en traits pleins) ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$.

La droite T (en pointillés) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(3; 1)$.



1. Répondre sans justifier :
   a) Donner $f(1)$.
   b) Résoudre $f(x) > 0$.
2. Expliquer chaque réponse :
   a) Déterminer $f'(3)$.
   b) Dresser le tableau de signes de f'.

Solution :

1. a) $f(1) = -0,5$
   b) $S =]2; 5]$
2. a) On regarde le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A. Par lecture graphique : $m = \dfrac{3}{2} = 1,5$.
   Pour trouver m, on peut aussi considérer le point $B(2; -0,5)$ qui appartient à la tangente et calculer : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-(-0,5)}{3-2} = \dfrac{3}{2} = 1,5.$, donc $f'(3) = \dfrac{3}{2}$.
   b) • La fonction f est décroissante sur $[0; 1]$, par conséquent $f'(x) \leqslant 0$.
   • La fonction f est croissante sur $[1; 4]$, par conséquent $f'(x) \geqslant 0$.
   • La fonction f est décroissante sur $[4; 5]$, par conséquent $f'(x) \leqslant 0$.

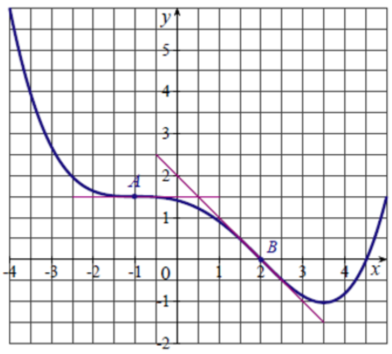
x	0		1		4		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

.

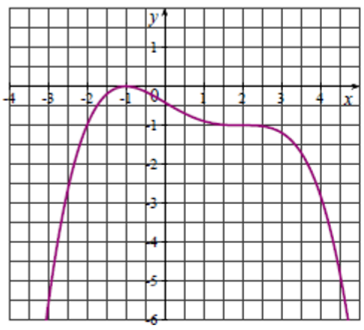
Exercice 2 (......../3 points)

La courbe $\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f', la dérivée de la fonction f.

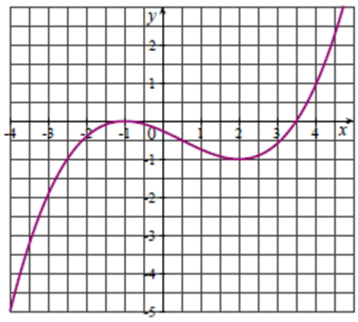
Courbe $\mathscr{C}_f$



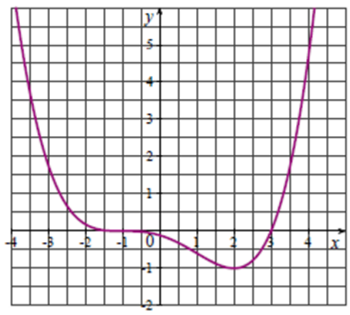
Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$



Courbe $\mathscr{C}_3$



Parmi les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, choisir celle qui représente la courbe représentative de f'. Justifier.

Solution :

- La fonction f est décroissante sur $[-4; 3,5]$. Par conséquent $f'(x) \leqslant 0$ sur $[-4; 3,5]$.
- La fonction f est croissante sur $[3,5; 5]$. Par conséquent $f'(x) \geqslant 0$ sur $[3,5; 5]$.
  Avec ces informations, on peut donc construire le tableau suivant :

x	-4		3.5		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1.5

La courbe $\mathscr{C}_2$ est la seule courbe parmi les courbes proposées qui est négative sur $[-4; 3,5]$, positive sur $[3,5; 5]$.

Donc la courbe représentative de la fonction f' est $\mathscr{C}_2$.

Exercice 3 (......../7 points)

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016.

Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux et une répartition des étudiants sur les divers sites de son université, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel, chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (**entre le 1er septembre et le 30 juin**);
- les effectifs constatés **à la rentrée de septembre** connaissent une augmentation de 4 % par rapport à ceux du **mois de juin** qui précède.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'étudiants estimé selon ce modèle **à la rentrée de septembre** $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

1. a) Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.
   b) Estimer le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$.
   Remarque : Si vous n'arrivez pas justifier la question 2, utiliser la forme récurrente de la suite (u_n) *:* $u_{n+1} = 1,04u_n - 156$*, pour résoudre la suite de l'exercice.*
3. Recopier et compléter les lignes L3, L4 et L5 de l'algorithme suivant afin qu'il calcule le nombre d'années à partir duquel le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	$N \leftarrow 0$
L2	$U \leftarrow 27\,500$
L3	Tant que $U \leqslant \dots$
L4	$\quad N \leftarrow \dots$
L5	$\quad U \leftarrow \dots$
L6	Fin Tant que
L7	Afficher N

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas.
   Recopier le tableau suivant et le compléter en ajoutant le nombre nécessaire de colonnes ; on arrondira les valeurs de U à l'unité.

	Initialisation	Étape 1	...
Valeur de N	0	...	
Valeur de U	27 500	...	

   b) Donner la valeur de N calculée par cet algorithme.
5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de N.
   Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $\quad u_n = 23\,600 \times 1,04^n + 3\,900$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

Solution :

1. a) En juin 2017, on peut estimer qu'il y aura $27\,500 - 150 = 27\,350$ étudiants dans cette université.
   b) À la rentrée de septembre 2017, il y aura à la suite de l'augmentation de 4 % :
   $1,04 \times 27\,350 = 28\,444$ étudiants.
2. Soit u_n le nombre d'étudiants en septembre de l'année 2016 + n. En juin de l'année suivante (année $(n+1)$), 150 étudiants auront démissionné, pour un reste de $u_n - 150$. Puis à la rentrée de septembre de l'année $(n+1)$, le nombre d'étudiants aura subi une augmentation de 4 %, soit $1,04 \times (u_n - 150) = 1,04 \times u_n - 156$.
   Donc en septembre de l'année $(n+1)$ il y aura $1,04u_n - 156$ étudiants, soit pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = 1,04u_n - 156.$$
3. On complète les lignes L5, L6, L7 et L9 de l'algorithme suivant afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

L1	N prend la valeur 0
L2	U prend la valeur 27 500
L3	Tant que $U \leqslant 33\,000$ faire
L4	$N \leftarrow N + 1$
L5	$U \leftarrow 1,04 \times U - 156$
L6	Fin Tant que
L7	Afficher N

4. a) On fait fonctionner cet algorithme pas à pas:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Étape 4	Étape 5	Étape 6
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Valeur de U	27 500	28 444	29 426	30 447	31 509	32 613	33 762

b) La valeur affichée en sortie de cet algorithme est : $N = 6$.

5. On cherche à calculer explicitement le terme général u_n en fonction de n.
Pour cela, on note (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 3\,900$.

a) Comme $v_n = u_n - 3\,900$, on peut déduire que :
$u_n = v_n + 3\,900$
$u_{n+1} = v_{n+1} + 3\,900$
Or :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1,04u_n - 156 \\ v_{n+1} + 3\,900 &= 1,04(v_n + 3\,900) - 156 \\ v_{n+1} + 3\,900 &= 1,04v_n + 4\,056 - 156 \\ v_{n+1} + \cancel{3\,900} &= 1,04u_n + \cancel{3\,900} \\ v_{n+1} &= 1,04v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est de la forme $v_{n+1} = qv_n$, elle est donc géométrique de raison $1,04$ et de premier terme
$v_0 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600$.

b) Donc pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 23\,600 \times 1,04^n$.
De plus, on a $u_n = v_n + 3900$ donc $u_n = 3\,900 + 23\,600 \times 1,04^n$.

c) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,04$. $q > 1$ donc la limite de la suite (v_n) quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$. Donc la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ est aussi égale à $+\infty$.
Le nombre d'étudiants de cette université ne se stabilisera jamais, et continuera à augmenter à l'infini dépassant toute limite de capacité que l'on souhaiterait imposer.

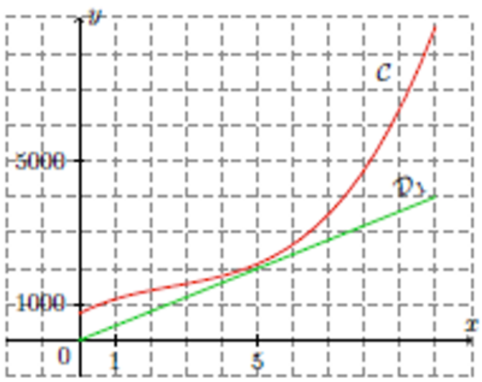
Exercice 4 (......../8 points)

Une entreprise produit du tissu en coton qu'elle conditionne en "roules" de 2000m de long et 1,5m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10km en continu. Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur x, en km, par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750, \text{ où } x \in [0; 10].$$

Etude de bénéfice :

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction C et la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = 400x$.



1. Au vu du graphique, expliquer pourquoi l'entreprise ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est à 400 euros par km.

2. Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros par km.
   a) Tracer sur la figure ci-dessus, la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation $y = 680x$.
   b) Déterminer graphiquement, avec la précision permise par la graphique, pour quelles quantiés produites et vendues, l'entreprise réalise un bénéfice si le prix du marché est de 680 euros par km.
3. Soit la fonction bénéfice B définie sur $[0; 10]$ par :

$$B(x) = 680x - C(x)$$

   Exprimer $B(x)$ en fonction x uniquement et démontrer que pour tout réel x de $[0; 10]$, on a :

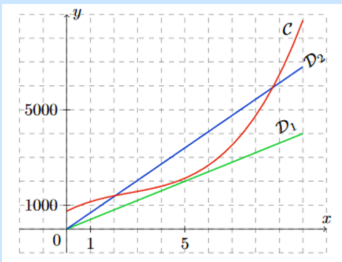
$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$

4. a) Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0; 10]$.
   b) En déduire la quantité produite et vendue pour laquelle le bénéfice réalisé par l'entreprise est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.
5. a) Montrer que $B(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[0; 10]$.
   b) Déterminer les valeurs de x_1 et x_2 à la calculatrice.
   c) Dresser le tableau de signes de la fonction $B(x)$ sur $[0; 10]$;
   d) En déduire le nombre kilomètres de tissu que l'entreprise doit fabriquer afin qu'elle établisse un bénéfice. (Ajuster vos résultats au mètre près).

Solution :

1. La droite $\mathcal{D}_1$ représentant la recette se situe strictement en-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentant le coût. On interprète ainsi que le coût sera toujours plus élévé que la recette, l'entreprise ne peut donc pas réaliser de bénéfice.

2. a)



   b) Graphiquement, l'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle fabrique et vend entre 2 et 8,6 km de tissu en continu (environ).

3. Soit B la fonction représentant le bénéfice définie sur $[0; 10]$:

$$\begin{aligned} B(x) &= 680x - C(x) \\ &= 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750) \\ &= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 \\ &= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750 \end{aligned}$$

4. La fonction $B(x)$ est dérivable sur $[0; 10]$:
   $B'(x) = 15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 = -45x^2 + 240x + 180$
   Afin de déterminer les variations de la fonction B, étudions d'abord le signe de sa fonction dérivée B'.
   B' est une fonction polynomiale du second degré, nous savons déterminer son signe.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000$, $\sqrt{\Delta} = 300$. $\Delta > 0$, la fonction B' admet deux racines réelles.
   $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-240 + 300}{2 \times (-45)} = -\dfrac{2}{3}$
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-240 - 300}{2 \times (-45)} = 6$

L'étude du signe de B' sur $\mathbb{R}$ (car $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		6		$+\infty$
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'étude du signe de B' sur $[0; 10]$ et les variations de B sur $[0; 10]$:

x	0		6		10
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-750	$\nearrow$	1410	$\searrow$	-1950

b) Pour réaliser un bénéfice maximal de 1410 euros, l'entreprise doit produire et vendre 6km de tissu.

5. a)
- Sur l'intervalle $[0; 6]$, la fonction f est strictement croissante et continue. Ses images varient de -750 à 140. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $B(x) = 0$ admet une solution sur $[0; 6]$.
- Sur l'intervalle $[6; 10]$, la fonction f est strictement décroissante et continue. Ses images varient de 1410 à -1950. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $B(x) = 0$ admet une solution sur $[6; 10]$.

Conclusion : $B(x) = 0$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 10]$.

b) D'après les résultats obtenues à la calculatrice, on a : $x_1 \approx 2,0623$ et $x_2 \approx 8,7286$.

c) On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		2.0623		6		8.7286		10
$B(x)$	-750	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1410	$\searrow$	0	$\searrow$	-1950
$B(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

d) L'entreprise réalise un bénéfice si elle fabrique et vend entre 2 062 mètres et 8 718 mètres de tissu.

$\sim$