Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Composition N^{o}1

Note

...../20

Remarque : Faire le sujet de spécialité sur une autre copie, en indiquant le nom du professeur de spécialité sur la copie.

Merci, bonne épreuve à tous.

Exercice 1 (......../5 points)

Pour chacunes des affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

1. On considère f une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$, ainsi que le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Affirmation : La fonction f est convexe sur $]-\infty;4]$.

2. **Affirmation :** La somme des 20 premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_n = 400 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ arrondie à l'unité est égal à : 2.
3. Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x^3 - 2x - 3$.

   Affirmation : f admet un point d'inflexion point de coordonnées $(0;0)$.
4. Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 8x + 4$.

   Affirmation : L'équation de la tangente à la courbe de la fonction au point d'abscisse 3 a pour équation : $y = -2x - 5$.

Solution :

1. Faux.

   La fonction $f'(x)$ est décroissante sur $]-\infty;4]$, par conséquent elle est concave sur $]-\infty;4]$.
2. Faux.

   La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 400$. On peut donc calculer la somme des 20 premiers termes :

$$S_{19} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 400 \times \frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{20}}{1-\dfrac{1}{2}} \approx 800$$

3. Faux.

   $f(x) = 2x^3 - 2x - 3$, $f'(x) = 6x^2 - 2$, $f''(x) = 12x$.

   f admet un point d'inflexion lorsque $f''(x) = 0$ et change de signe.

   On en déduit le tableau de signe de f'' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

Par conséquent, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(0; f(0))$. Comme $f(0) = 2\times 0^3 - 2\times 0 - 3 = -3$, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(0; -3)$.

4. Vrai.

L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse a admet pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Ici $a = 3$ et $f'(x) = 2x - 8$

Ainsi, $f'(3) = 2\times 3 - 8 = -2$ et $f(3) = 3^2 - 8\times 3 + 4 = 9 - 24 + 4 = -11$.

On détermine alors l'équation pour la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 3 :

$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(3)(x-3) + f(3) = -2(x-3) - 11 = -2x + 6 - 11 = -2x - 5$.

Exercice 2 (......../5 points)

Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n) le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017 + n$.

1. a) Avec ce modèle. vérifier que le nombre de loups de ce pays en 2018 sera de 318.
   b) Justifier que, pour tout entier $n \in N$, $u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il détermine au bout de combien d'années la population de loups aura doublé.

```
N ← 0
U ← 300
Tant que ... faire
    U ← ...
    N ← ...
Fin Tant que
```

3. On définit la suite (v_n) par : $v_n = u_n - 150$ pour tout $n \in N$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,12$.
   Préciser son terme initial.
   b) Exprimer, pour tout $n \in N$, v_n en fonction de n.
   En déduire u_n en fonction de n.
   c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier.
   Que peut-on en déduire?
4. a) Déterminer le plus petit entier n entier naturel tel que :
$$150 + 1,12^n \times 150 > 600,$$
   b) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'énoncé.
5. En 2023. avec ce modèle, la population de loups est estimée à 446 loups et le rythme de croissance annuel de la population reste identique. Dans ce cas, une nouvelle décision sera prise par le gouvernement: afin de gérer le nombre de loups dans le pays, il autorisera les chasseurs à tuer un quota de 35 loups par an.
   En quelle année la population de loups dépassera-t-elle 600 loups ?
   Toute trace de recherche sera valorisée dans cette question.

Solution :

1. a) Augmenter de $12\,\%$ revient à multiplier par $1,12$.
Donc en 2018, il y aura : $300 \times 1,12 - 18 = 318$ loups.

   b) Pour tout entier naturel n, on note par u_n et u_{n+1} les nombres respectifs de loups les années n et $n+1$. D'après le texte, d'une année à l'autre le nombre de loups augmente de $12\,\%$, puis on autorise à tuer 18 animaux.
Donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,12 \times u_n - 18$.

2. Ci-dessous l'algorithme complété :

```
N ← 0
U ← 300
Tant que U < 600 faire
        U ← 1,12 × U − 18
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

3. a) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 1,12 \times u_n - 18 - 150 = 1,12 \times u_n - 168$
$= 1,12 \times \left(u_n - \dfrac{168}{1,12}\right) = 1,12(u_n - 150) = 1,12 \times v_n$
Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,12$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 150 = 150$.

   b) Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 150 \times 1,12^n$.
Or $u_n = v_n + 150$ donc $u_n = 150 \times 1,12^n + 150$.

   c) • $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,12^n = +\infty$, car la suite est de la forme q^n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, si $q > 1$.
   • $\lim\limits_{n\to+\infty} 150 = 150$, car c'est une suite constante qui ne dépend pas de n.

   Comme :

   • La limite d'un produit est le produit des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times 1,12^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times \lim\limits_{n\to+\infty} 1,12^n = +\infty$.
   • La limite d'une somme est la somme des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times 1,12^n + 150 = \lim\limits_{n\to+\infty} 150 \times 1,12^n + \lim\limits_{n\to+\infty} 150 = +\infty$

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Ainsi, chaque année, le nombre de loups ne cesse de croître.

4. a) $150 \times 1,12^n + 150 \geqslant 600 \iff 150 \times 1,12^n \geqslant 450 \iff 1,12^n \geqslant 3 \iff \ln(1,12^n) \geqslant \ln(3)$
$\iff n \times \ln(1,12) \geqslant \ln(3) \iff n \geqslant \dfrac{\ln(3)}{\ln(1,12)}$. or $\dfrac{\ln(3)}{\ln(1,12)} \approx 9,69$ donc $n \geqslant 10$.

   b) En 2027, le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

5. À l'aide d'un tableau et de la calculatrice, nous pouvons déterminer le nombre de loups après 2023 en utilisant le même mode de croissance annuelle mais avec un prélèvement annuel de 35.

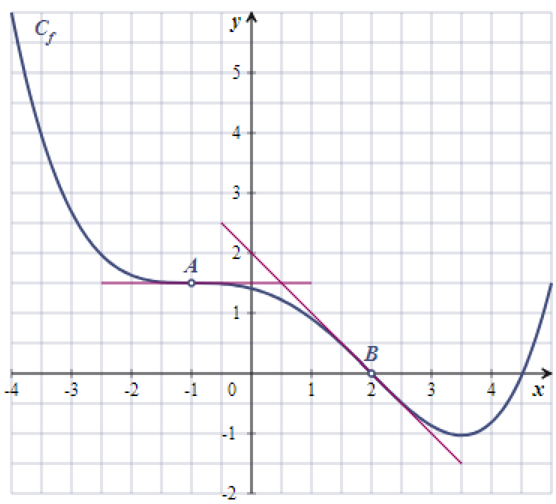
Année	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
n'	0	1	2	3	4	5	6	7
Population $w_{n'}$	446	$464,52$	$\approx 485,26$	$\approx 508,49$	$\approx 534,51$	$\approx 563,65$	$\approx 596,29$	$\approx 632,84$

Donc en 2030 le nombre de loups aura dépassé les 600 animaux.

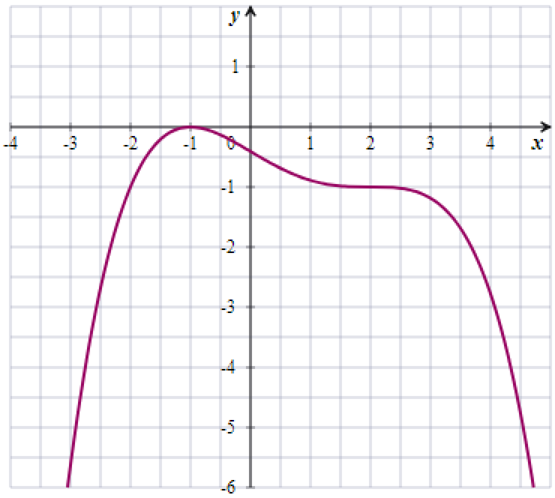
Exercice 3 (......../5 points)

Les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ sont les représentations graphiques de trois fonctions f, g et h définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note f', g' et h' les dérivées respectives des trois fonctions f, g et h.

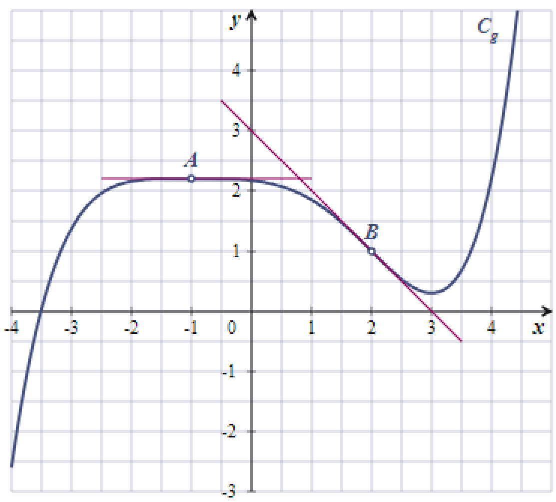
Courbe C_f



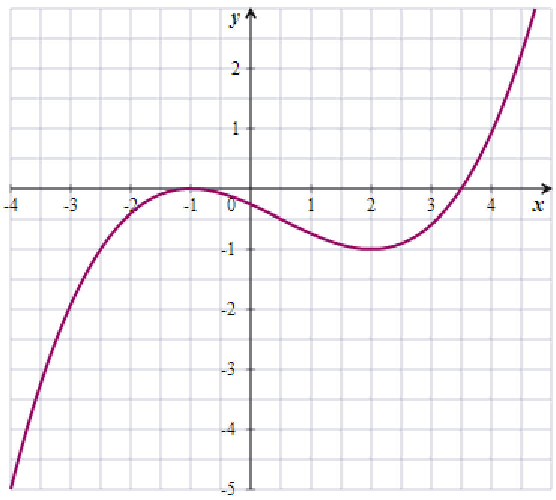
Courbe C_1



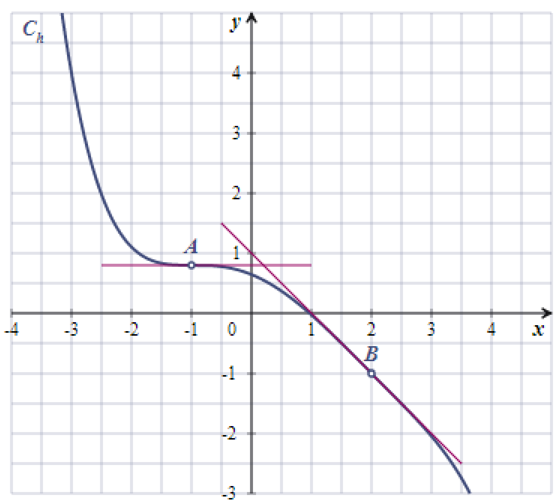
Courbe C_g



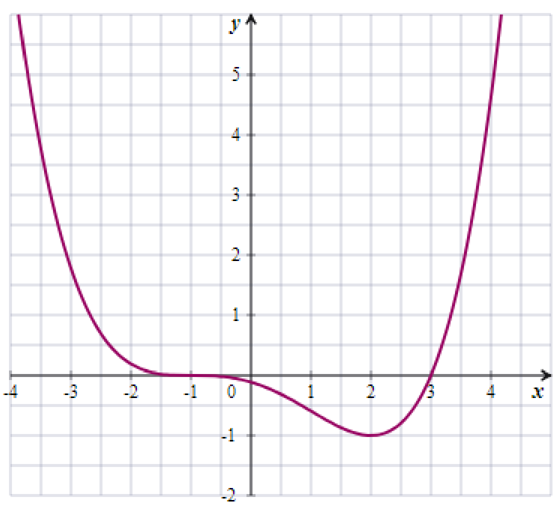
Courbe C_2



Courbe C_h



Courbe C_3



1. Par lecture graphique, déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.

2. Les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont les représentations graphiques des fonctions f', g' et h', MAIS pas nécessairement dans cet ordre.
   Associer à chacune des fonctions dérivées f', g' et h' sa courbe représentative, en justifiant votre réponse.
3. Justifier pourquoi $f''(0) < f''(4)$.
4. Combien de point(s) d'inflexion(s) la fonction g admet-elle ? Justifier votre réponse.
5. On considère t une fonction définie et dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t''(x) = h(x)$. Déterminer en justifiant, l'intervalle où la fonction t est concave et l'intervalle où la fonction t est convexe.

Solution :

1. $f'(-1) = 0$ et $f'(2) = -1$.

2. A partir des variations de la fonction, nous pouvons en déduire le signe de sa fonction dérivée. Utilisons cette propriété afin de trouver les courbes représentatives des fonctions f', g', h'.

   •

x	$-\infty$		$3{,}5$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   Parmi les trois courbes, la courbe $\mathcal{C}_2$ est la seule courbe correspondant au signe de f'. Par conséquent : $\mathcal{C}_2$ est la courbe représentative de f'.

   •

x	$-\infty$		-1		$3{,}5$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$0{,}75$	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Parmi les trois courbes, la courbe $\mathcal{C}_3$ est la seule courbe correspondant au signe de g'. Par conséquent : $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de g'.

   •

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
$h'(x)$		$-$	

   Parmi les trois courbes, la courbe $\mathcal{C}_1$ est la seule courbe correspondant au signe de h'. Par conséquent : $\mathcal{C}_1$ est la courbe représentative de h'.

3. Observons la convexité de la fonction f.

   - f est convexe sur $]-\infty;-1[\bigcup]2;+\infty[$. Donc pour tout $x \in]-\infty;-1[\bigcup]2;+\infty[$, $f''(x) > 0$.
     Par conséquent : $f''(4) > 0$.
   - f est concave sur $]-1;2[$. Donc pour tout $x \in]-1;2[$, $f''(x) < 0$.
     Par conséquent : $f''(0) < 0$.

   Comme $f''(4) > 0$ et $f''(0) < 0$, on peut en déduire que $f''(0) < f''(4)$.

4. g admet un point d'inflexion. La tangente à la courbe d'abscisse 2 est la seule tangente qui traverse la courbe. Son point d'inflexion à pour coordonnées $(2; 1)$.

5. On construit la tableau de signe la fonction h :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$t''(x) = h(x)$		$+$	0	$-$	

Comme $t''(x) > 0$ sur $]-\infty; 1[$, la fonction t est convexe sur $]-\infty, 1[$.

Comme $t''(x) < 0$ sur $]1; +\infty[$, la fonction t est concave sur $]1; +\infty[$.

Exercice 4 (......../5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x - 3$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

La fonction f est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.
   b) À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de la solution α.
   c) En déduire le tableau de signe de f.
5. Calculer $f''(x)$.
6. a) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, calculer ses coordonnées.

Solution :

1. $f'(x) = 3 \times \dfrac{x^2}{3} - 6x + 8 = x^2 - 6x + 8$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 8 = 36 - 32 = 4$. $\Delta > 0$, f' admet deux racines réelles sur $\mathbb{R}$. $\sqrt{\Delta} = 2$.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2} = 2$$

Comme le terme de degré deux est strictement positif ($a > 0$), on déduit le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3.

x	0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	$\approx 3{,}67$	$\searrow$	$\approx 2{,}33$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) • Sur $[2; +\infty[$, les images de la fonction f sont strictements positives. Par conséquent $f(x) = 0$ n'ademet de solution sur $[2; +\infty[$.
   • Sur $[0; 2]$, f est continue et strictement croissante, ses images varient entre -3 et environ 3,7. D'après la propriété du théorème des valeurs intermmédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; 2]$.

   Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.

   b) A la calculatrice, on observe que $\alpha \approx 0,45$.

   c)

   D'après les variations et les images de la fonction f :

x	0		α		2		4		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\approx 3{,}67$	$\searrow$	$\approx 2{,}33$	$\nearrow$	$+\infty$

   On en déduit son signe :

x	0		$\alpha \approx 0{,}45$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5. Comme $f'(x) = x^2 - 6x + 8$, on détermine que $f''(x) = 2x - 6$.

6. a) Etudions le signe de la dérivée seconde de f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

   On en déduit le signe de f'' :

x	0		3		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   Comme $f''(x) > 0$ sur $]3; +\infty[$, f est convexe sur $]3; +\infty[$.
   Comme $f''(x) < 0$ sur $[0; 3[$, f est concave sur $[0; 3[$.

   b) f admet un point d'inflexion de coordonnées $(3; f(3))$, comme $f(3) = 3$, f admet un point d'inflexion de coordonnées $(3; 3)$.