Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 3

Note

...../20

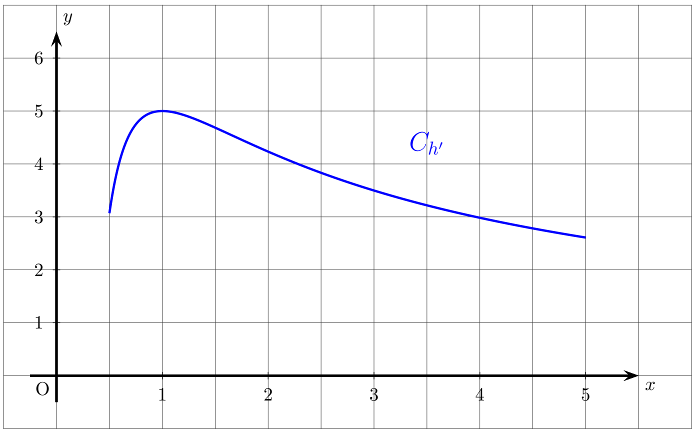
Remarque : Calculatrice en mode examen. Sujet à rendre avec la copie.

Merci, bonne épreuve à tous.

Exercice 1 (......../5 points)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Une justification est attendue.

1. Le chiffre d'affaires d'une entreprise en janvier 2010 est de 55 000 €. En janvier 2019 son chiffre d'affaires est de 115 000 €.
   Affirmation : Entre janvier 2010 et janvier 2019, le chiffre d'affaires de l'entreprise à augmenté de 48%.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = kq^x$, avec k et q deux nombres réels à déterminer. Sachant de plus, que $f(0) = 8$ et que $f(3) = 27$.
   Affirmation : La fonction $f(x) = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 + x + 1$.
   Affirmation : La fonction g **est concave sur** $\mathbb{R}$.
4. **L'équation** $e^{2x+4} = e^{-7x+3}$ **admet comme solution** $x = -\frac{1}{5}$.
5. Soit $C_{h'}$ la représentation graphique de la fonction h' (représentée ci-dessous) fonction dérivée de la fonction h. h et h' sont toutes deux définies sur l'intervalle $[0,5;5]$.



   Affirmation : La fonction h **est convexe sur** $]0,5;1[$ **et concave sur** $]1;5[$.

Solution :

1. Fausse.
   $\frac{115000 - 55000}{55000} \approx 1,09$.
   L'augmentation est d'environ 109%.
2. Vraie.
   Comme

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 \\ kq^0 &= 8 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

   On a $f(x) = 8q^x$.

Et comme

$$\begin{aligned} f(3) &= 27 \\ 8q^3 &= 27 \\ q^3 &= \frac{27}{8} \\ q &= \sqrt[3]{\frac{27}{8}} \\ q &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 8 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

3. Fausse.
   $g'(x) = 2x + 1$ et $g''(x) = 2$. Comme $g''(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, g est convexe sur $\mathbb{R}$.
4. Fausse.

$$\begin{aligned} e^{2x+4} &= e^{-7x+3} \\ 2x + 4 &= -7x + 3 \\ 2x + 7x &= 3 - 4 \\ 9x &= -1 \\ x &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

5. Vraie.
   - h' est strictement croissante sur $]0,5;1[$. Par conséquent h est convexe sur $]0,5;1[$.
   - h' est strictement décroissante sur $]1;5[$. Par conséquent h est convexe sur $]1;5[$.

Exercice 2 (......../6 points)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = (3x - 4)e^x$.

1. a) Montrer que $f'(x) = e^x(3x - 1)$.
   b) Dresser le tableau de signes de f'.
   c) En déduire les variations de f.
2. On admet que $f''(x) = e^x(3x + 2)$.
   a) Dresser le tableau de signes de f''.
   b) En déduire la convexité de f.
   c) f admet-elle un point d'inflexion (justifier) ? Si oui, préciser ses coordonnées.

Solution :

1. a) On pose $u(x) = 3x - 4$, $u'(x) = 3$, $v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ f'(x) &= 3e^x + (3x - 4)e^x \\ f'(x) &= e^x(3 + (3x - 4)) \\ f'(x) &= e^x(3 + 3x - 4) \\ f'(x) &= e^x(3x - 1) \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 0 \\ 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$3x-1$		$-$	0	$+$	
f'		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-3e^{\frac{1}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. a)

$$\begin{aligned} 3x+2 &= 0 \\ 3x &= -2 \\ x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
e^x		$+$		$+$	
$3x+2$		$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	

b) • $f''(x) < 0$ sur $]-\infty; -\frac{2}{3}[$, f est donc concave sur $]-\infty; -\frac{2}{3}[$.
- $f''(x) > 0$ sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$, f est donc convexe sur $]-\frac{2}{3}; +\infty[$.

c) f admet un point d'inflexion au point abscisse $-\dfrac{2}{3}$, car :

- $f''(-\frac{2}{3}) = 0$.
- f'' change de signe au point d'abscisse $-\dfrac{2}{3}$. Donc f change de convexité au point d'abscisse $-\dfrac{2}{3}$.

Ce point d'inflexion a pour coordonnées : $\left(-\dfrac{2}{3}; f\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right)$; c'est à dire : $\left(-\dfrac{2}{3}; -6e^{-\frac{2}{3}}\right)$.

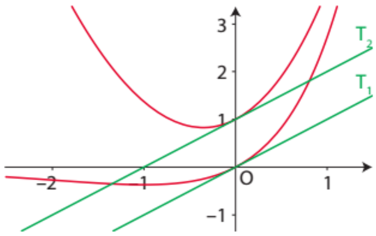
Exercice 3 (......../3 points)

Dans le repère ci-dessous sont représentées les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x \text{ et } g(x) = x^2 + e^x.$$

Sont représentées également :

- La tangente T_1, tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0; d'équation $y = x$.
- La tangente T_2, tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0.



On rappelle que deux droites sont parallèles si et seulement si les fonctions les représentants ont le même coefficient directeur.

1. Calculer $g'(x)$, $g'(0)$ et $g(0)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente T_2.
3. Les droites T_1 et T_2 sont-elles parallèles ? (Justifier)

Solution :

1. $g'(x) = 2x + e^x$, $g(0) = 0^2 + e^0 = 0 + 1 = 1$, $g'(0) = 2 \times 0 + e^0 = 2 \times 0 + 1 = 1$.
2.

$$\begin{aligned} T_2 : y &= g'(0)(x-0) + g(0) \\ y &= 1 \times (x-0) + 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

3. T_1 a pour équation $y = x$ et que T_2 a pour équation $y = x + 1$. Ces deux équations de droites ont le même coefficient directeur. C'est-à-dire 1. Par conséquent, les tangentes T_1 et T_2 sont parallèles.

Exercice 4 (......../6 points)

Dans une entreprise de 250 salariés, 30% des salariés ont moins de 34 ans, 48% des salariés âgés de moins de 34 ans fument et, parmi les salariés de plus de 34 ans, 24% sont des fumeurs.

On choisit au hasard un salarié dans cette entreprise et on définit les événements suivants :

- A : "le salarié est âgé de moins de 34 ans".
- F : "le salarié est un fumeur".

Partie A

1. Compléter le tableau des effectifs suivants :

	Moins de 34 ans	Plus de 34 ans	Total
Fumeur			
Non Fumeur			
Total			250

2. Définir à l'aide d'une phrase l'événement $A \cap F$, puis calculer $p(A \cap F)$.
3. Montrer que $p(F) = 0,312$.
4. On a choisi un salarié fumeur, quelle est la probabilité que ce salarié ait plus de 34 ans ? (donner une valeur arrondie à 10^{-3} près).

Partie B

Dans cette partie, donner valeurs arrondies à 10^{-3} près.

On choisit 10 salariés dans cette entreprise. (On admet l'effectif de l'entreprise est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage successif avec remise).

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de fumeurs parmi les 10 salariés choisis.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont précisera les paramètres.
2. Quelle est probabilité d'avoir exactement 6 fumeurs dans le groupe ?
3. Quelle est probabilité d'avoir au moins un fumeur dans le groupe ?
4. Quelle est probabilité d'avoir au plus 4 fumeurs dans le groupe ?
5. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter le résultat.

Prise d'initiative (bonus): Quel est le nombre minimal n de salariés qu'il faut choisir pour que la probabilité d'avoir au moins un fumeur dans le groupe soit supérieure ou égale à 0,999 .

Solution :

Partie A

1.

	Moins de 34 ans	Plus de 34 ans	Total
Fumeur	36	42	78
Non Fumeur	39	133	172
Total	75	175	250

Les calculs :

- $0,3 \times 250 = 75$
- 250-75=175
- $0,48 \times 75 = 36$
- 75-36=39
- $0,24 \times 175 = 42$
- 175-42=133
- 36+42=78
- 39+133=172

2. $A \cap F$ décrit l'événement "le salarié est un fumeur âgé de moins de 34 ans".
   $p(A \cap F) = \dfrac{36}{250} = 0,144.$
3. $p(F) = \dfrac{78}{250} = 0,312.$
4. $p = \dfrac{42}{78} \approx 0,538$

Partie B

1. Soit S l'événement succès : "le salarié est un fumeur" de probabilité $p(S) = 0,312$ et $\overline{S}$ l'événement échec : "le salarié n'est pas un fumeur" de probabilité $p(\overline{S}) = 1 - p(S) = 1 - 0,312 = 0,688$. C'est une épreuve de Bernoulli. Cette épreuve est répétée 10 fois de manière indépendante (car on admet l'effectif de l'entreprise est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage successif avec remise) et identique. On peut modéliser cette expérience aléatoire par une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,312$.
2. $p(X = 6) \approx 0,043.$
3. $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) \approx 0,976.$
4. $p(X \leqslant 4) = p(X = 0)+p(X = 1)+p(X = 2)+p(X = 3)+p(X = 4) \approx 0,0237+0,1078+0,2199+0,2659+0,2110 \approx 0,828.$
5. $E(X) = nq = 10 \times 0,312 = 3,12$. Il y a en moyenne 3,12 fumeurs dans des groupes de 10 salariés.

Prise d'initiative :

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,312^0 \times 0,688^n = 1 - 0,688^n$. Car $\binom{n}{0} = 1$ et $0,312^0 = 1$

Cherchons $n \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) &\geqslant 0,999 \\ 1 - 0,688^n &\geqslant 0,999 \\ -0,688^n &\geqslant 0,999 - 1 \\ -0,688^n &\geqslant -0,001 \\ 0,688^n &\leqslant 0,001 \end{aligned}$$

Soit (u_n) la suite géométrique définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0,688^n$. La suite (u_n) est strictement décroissante car $0 < q < 1$.

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 0,001$.

A la calculatrice, on obtient :

$u_{18} = 0,688^{18} \approx 0,0012$ et $u_{19} = 0,688^{19} \approx 0,0008$

$n = 19$

Il faut au minimum de 19 salariés dans le groupe pour que la probabilité qu'il y ait au moins un fumeur soit supérieure ou égale à 0,999.

$\sim$