Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 4

Note

...../20

Remarque : Calculatrice en mode examen. Sujet à rendre avec la copie.

Merci, bonne épreuve à tous.

Exercice 1 (......../6 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$, avec a et b deux nombres réels. On note f' sa fonction dérivée.

   On a alors :

   a. $f'(x) = x + be^x$ **b.** $f'(x) = a + e^x$
   c. $f'(x) = (ax + a + b)e^x$ **d.** $f'(x) = (2a+b)e^x$

2. On considère toujours la même fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$, avec a et b deux nombres réels. On sait de plus que $f(0) = 4$ et que $f'(0) = 2$. On en déduit que :

   a. $f(x) = (-2x+4)e^x$ **b.** $f(x) = (4x+2)e^x$
   c. $f(x) = (2x+4)e^x$ **d.** $f(x) = (-4x+2)e^x$

3. Esteban va à l'école chaque matin avec une trousse. À la fin de la journée, il oublie sa trousse avec une probabilité de 0,2. Dans l'année le nombre de jours d'école est de 162. On considère que les oublis journaliers sont indépendants les uns des autres. La probabilité qu'il oublie sa trousse 30 fois exactement dans l'année est environ :

   a. $0,19$ **b.** $0,07$
   c. $0,60$ **d.** $0,36$

4.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise internet régulièrement	760	630	350	1 740
N'utilise pas internet régulièrement	40	70	150	260
Total	800	700	500	2 000

   On définit les événements:

   - I : "Utilise internet régulièrement"
   - T : "L'élève est en terminale".

   D'après le tableau ci-dessus, si l'on prélève un élève au hasard, on peut en déduire que :

   a. $P_T(I) = 0,175$ **b.** $P_I(T) = 0,7$
   c. $P(T \cap I) = \dfrac{35}{174}$ **d.** $P(I) = 0,87$

5. Soit $g(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. On note g'' la dérivée seconde de g définie sur $]0;+\infty[$ par $g''(x) = \dfrac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$.

   On en déduit que :

   a. g est convexe sur $]1;+\infty[$ **b.** g est concave sur $]0;1]$
   c. g est concave sur $]0;+\infty[$ **d.** g est concave sur $]1;+\infty[$

6. $e^{x^2-1} = 1$. Cette équation a pour solution(s) :

   a. -1 et 1
   b. 0
   c. -2 et 2
   d. $-0,5$ et $0,5$

Solution :

1. On pose $u(x) = ax + b$, $u'(x) = a$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
   $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (a + ax + b)e^x$
   Réponse c

2. Comme
   $\begin{cases} f(0) & = & 4 \\ f(0) & = & (a \times 0 + b)e^x \end{cases}$
   On en déduit que :
   $$\begin{aligned} a \times 0 + b &= 4 \\ b &= 4 \end{aligned}$$
   Comme
   $\begin{cases} f'(0) & = & 2 \\ f"(0) & = & (a + a \times 0 + b)e^x \end{cases}$
   et comme $b = 4$
   $\begin{cases} f'(0) & = & 2 \\ f"(0) & = & (a + a \times 0 + 4)e^x \end{cases}$
   On en déduit que :
   $$\begin{aligned} a + a \times 0 + 4 &= 2 \\ a + 4 &= 2 \\ a &= 2 - 4 \\ a &= -2 \end{aligned}$$
   Par conséquent $f(x) = (ax + b)e^x = (-2x + 4)e^x$.
   Réponse a

3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 162$ et $p = 0,2$. D'après la calculatrice, $P(X = 30) \approx 0,07$.
   Réponse b

4. - $P_T(I) = \dfrac{350}{500} = 0,7$
   - $P_I(T) = \dfrac{350}{1740} = 0,2$
   - $P(I) = \dfrac{350}{2000} = \dfrac{35}{200} = 0,175$
   - $P(I) = \dfrac{1740}{2000} = 0,87$

   Réponse d

5. $e^x > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$; $x^4 > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Le signe de la fonction g'' dépend du signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 6$.
   Étudions le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 6$, avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 6$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8$.
   Comme $\Delta < 0$ et que $a > 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$.
   Ainsi $g''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.
   Comme $g''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, alors la fonction g est convexe sur $]0; +\infty[$ et par conséquent convexe sur $]1; +\infty[$.
   Réponse a

Exercice 2 (......../7 points)

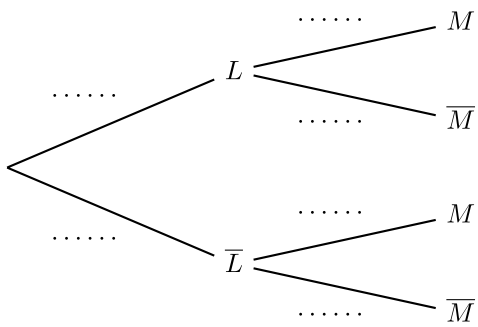
Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, les autres ne sont pas licenciés. Aucun participant n'abandonne la course.

- Parmi les licenciés, 66 % font le parcours en moins de 5 heures; les autres en plus de 5 heures.
- Parmi les non licenciés, 83 % font le parcours en plus de 5 heures; les autres en moins de 5 heures.

On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note:

- L l'évènement le cycliste est licencié dans un club et $\overline{L}$ son évènement contraire,
- M l'évènement le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures et $\overline{M}$ son évènement contraire.

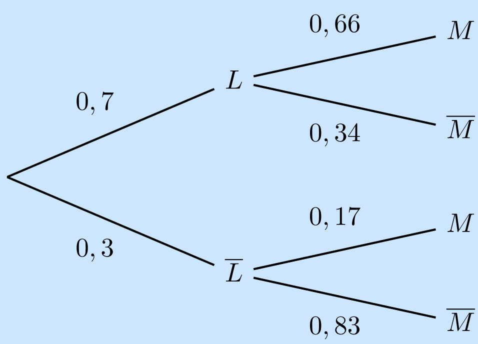
1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.
4. Justifier que $P(M) = 0,513$.
5. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison? Justifier la réponse.
6. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard. On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X?
   b) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.
   c) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures?
   d) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins un des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures?

Solution :

1. L'énoncé donne $P(L) = 0,7$, $\quad P_L(M) = 0,66$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right) = 0,83$.
2. On complète l'arbre pondéré suivant représentant la situation.

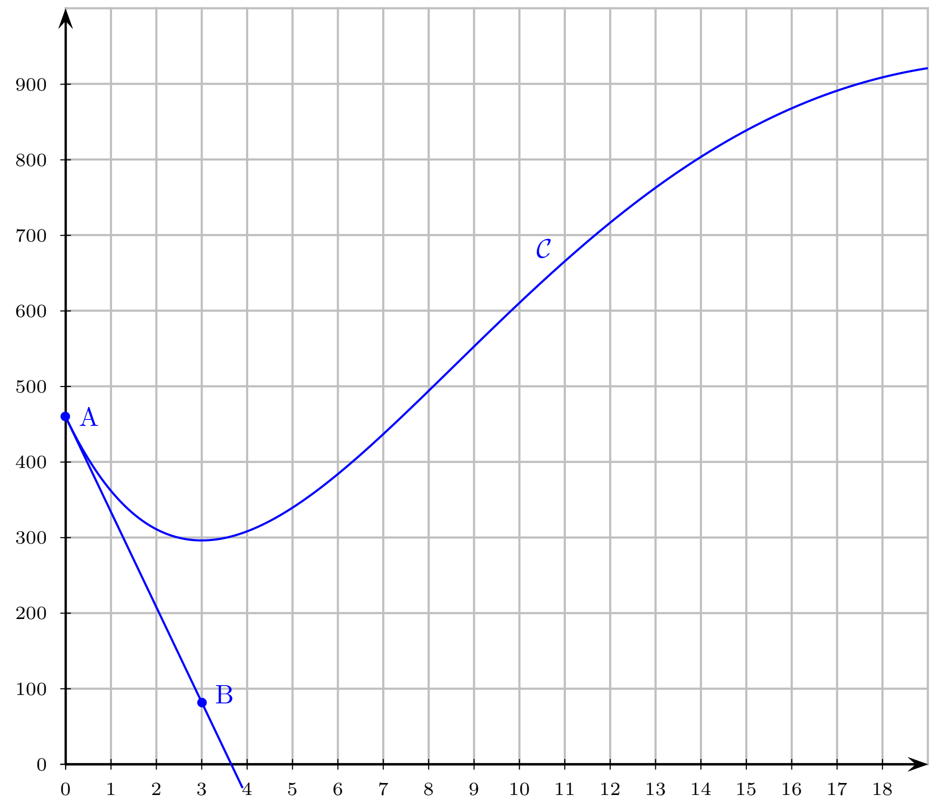


3. On calcule $P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M) = 0,7 \times 0,66 = 0,462$.
4. On calcule de même $P\left(\overline{L} \cap M\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(M) = 0,3 \times 0,17 = 0,051$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $P(M) = P(L \cap M) + P\left(\overline{L} \cap M\right) = 0,462 + 0,051 = 0,513$.
5. La probabilité d'avoir un licencié parmi ceux qui ont fait le parcours en moins de 5 heures est égale à :
   $P_M(L) = \dfrac{P(M \cap L)}{P(M)} = \dfrac{0,462}{0,513} = \dfrac{462}{513} \approx 0{,}900\,6$ soit effectivement un tout petit plus de 90 %.
6. a) Les choix étant indépendants, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,513$.
   b) $P(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,513^4 \times (1 - 0,513)^{10-4} = \binom{10}{4} \times 0,513^4 \times 0,487^6 \approx 0{,}194$ au millième près.
   c) La probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures est égale à :
   $P(X \leqslant 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$
   $= \binom{10}{0} \times 0,513^0 \times 0,487^{10} + \binom{10}{1} \times 0,513^1 \times 0,487^9 + \binom{10}{2} \times 0,513^2 \times 0,487^8 + \binom{10}{3} \times 0,513^3 \times 0,487^7$
   $\approx 0{,}000\,75 + 0{,}007\,9 + 0{,}037\,5 + 0{,}105\,3$
   soit environ 0,151 38; donc 0,151 au millième près.
   d) La probabilité, arrondie au millième, qu'au moins un des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures est égale à :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - P(X = 0)$
   $= 1 - \binom{10}{0} \times 0,513^0 \times 0,487^{10}$
   $\approx 1 - 0{,}000\,75$
   soit environ 0,999 249 6; donc 0,999 au millième près.

Exercice 3 (......../7 points)

Partie A

La courbe ($\mathcal{C}$) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 19], représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1 janvier 2000 (année numéro 0) et le 1 janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1 janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. Décrire l'évolution de l'audience journalière de cette chaîne de télévision entre le 1 janvier 2000 et le 1 janvier 2019.
2. Donner une valeur approchée du nombre de téléspectateurs le 1 janvier 2014.
3. La droite (AB), où les points A et B ont pour coordonnées A (0 ; 460) et B (3 ; 82), est la tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point A.
   Déterminer la valeur de $f'(0)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f représentée par ($\mathcal{C}$)?

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 29] par:

$$f(x) = (20x^2 - 80x + 460)\mathrm{e}^{-0,1x}$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. Donner une valeur approchée au millier du nombre de téléspectateurs de la chaîne le 1er janvier 2014.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0 ; 29].
   a) Démontrer que f' est définie par:
   $$f'(x) = (-2x^2 + 48x - 126)\mathrm{e}^{-0,1x},$$
   b) On considère l'équation: $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
   Un logiciel de calcul formel donne:

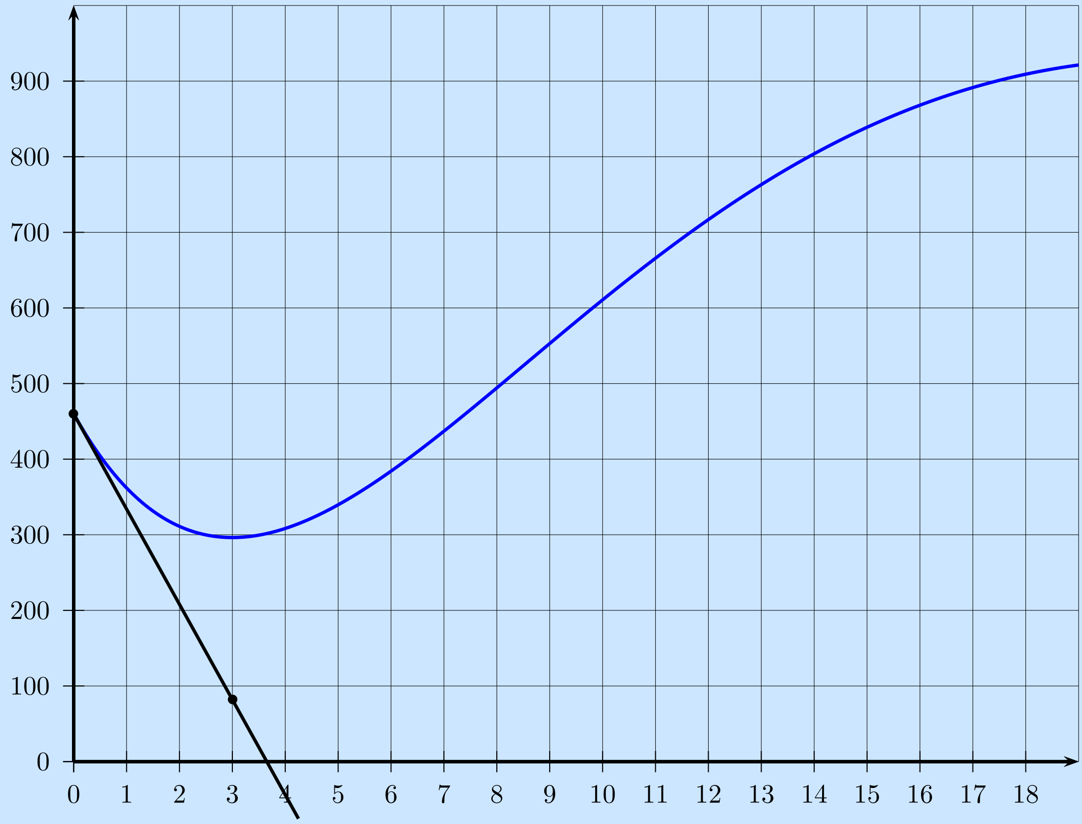
Instruction:	**Résultat:**
Solve($-2x^2 + 48x - 126 =$ 0)	3 et 21

   Retrouver ce résultat par le calcul.
   c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 29] et construire le tableau des variations de f sur l'intervalle [0 ; 29]. Arrondir les éléments du tableau à l'unité.
   d) Le nombre journalier de téléspectateurs de cette chaîne de télévision dépassera-t-il la barre du million avant l'année 2029? Justifier.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 800$ admet une unique solution α dans l'intervalle [3 ; 21]. Déterminer un encadrement d'amplitude 1 de α.

Solution :

Partie A

La courbe (C) ci-dessous, associée à une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 19], représente l'audience journalière d'une chaîne de télévision entre le 1er janvier 2000 (année numéro 0) et le 1er janvier 2019 (année numéro 19), c'est-à-dire le nombre quotidien de téléspectateurs, en milliers.



Ainsi, le 1er janvier 2000 la chaîne a été regardée par environ 460 000 téléspectateurs.

1. De 2000 à 2003, l'audience a baissé de 460 000 à 300 000 téléspectateurs, puis de 2003 à 2019 a régulièrement progressé à plus de 900 000 téléspectateurs.
2. On lit en 2014 environ 800 000 téléspectateurs.
3. $f'(0)$ nombre dérivé de la fonction en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB), soit :
   $f'(0) = \dfrac{y_{\text{B}} - y_{\text{A}}}{x_{\text{B}} - x_{\text{A}}} = \dfrac{82 - 460}{3 - 0} = \dfrac{-378}{3} = -126.$

Partie B

On cherche maintenant à prévoir l'évolution de l'audience de cette chaîne de télévision lors des dix prochaines années.

On considère que le nombre journalier (exprimé en milliers) de téléspectateurs de la chaîne est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 29]$ par:

$$f(x) = \left(20x^2 - 80x + 460\right)\text{e}^{-0,1x},$$

où x représente le nombre d'années depuis 2000 (par exemple $x = 19$ pour l'année 2019).

1. 2014 correspond à $x = 14$. D'où $f(14) = \left(20 \times 14^2 - 80 \times 14 + 460\right)\text{e}^{-0,1\times 14} \approx 803,906$ soit 804 milliers de téléspectateurs à un millier près.
2. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0 ; 29]$.
   a) f est le produit de fonctions dérivables sur R, donc sur $[0 ; 29]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = (2 \times 20x - 80)\text{e}^{-0,1x} + \left(20x^2 - 80x + 460\right)(-0,1)\text{e}^{-0,1x}$
   $= \left(40x - 80 - 2x^2 + 8x - 46\right)\text{e}^{-0,1x} = \left(-2x^2 + 48x - 126\right)\text{e}^{-0,1x}.$
   Rem. On peut vérifier que $f'(0) = -126$ (cf. question **3.** de la partie A.)
   b) On considère l'équation : $-2x^2 + 48x - 126 = 0$.
   $-2x^2 + 48x - 126 = 0 \iff -x^2 + 24x - 63 = 0.$
   Pour ce trinôme :
   $\Delta = 24^2 - 4 \times (-1) \times (-63) = 576 - 252 = 324 = 4 \times 81 = 2^2 \times 9^2 = (2 \times 9)^2 = 18^2.$

$\Delta > 0$, donc l'équation du second degré a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-24+18}{2\times(-1)} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-24-18}{2\times(-1)} = 21,$$

c) $f'(x) = \left(-2x^2+48x-126\right)\mathrm{e}^{-0,1x}$, comme $e^{-0,1x} > 0$ pour tout $x \in [0;29]$. Le signe de f' dépend du signe de la fonction $x \mapsto -2x^2+48x-126$.

On a $f(0) = 460$; $f(3) \approx 296$; $f(21) \approx 931$ et $f(29) \approx 823$. D'où le tableau de variations :

x	0		3		21		29
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	460	↘	296	↗	931	↘	823

d) Le tableau de variations de la fonction f montre que le maximum de téléspectateurs est de 931 milliers en 2021 ; la barre du million ne sera jamais atteinte entre 2000 et 2029.

3. On a vu que sur l'intervalle $[3 ; 21]$ la fonction est strictement croissante de $f(3) \approx 296$ à $f(2) \approx 931$, elle est continue sue cet intervalle donc d'après la propriété des valeurs intermédiaires comme $296 < 800 < 931$, il existe un réel unique $\alpha \in]3 ; 21[$ tel que $f(\alpha) = 800$.

La calculatrice donne $f(13) \approx 763$ et $f(14) \approx 804$, donc $13 < \alpha < 14$.

Comme à peu près 803 000 téléspectateurs regarderont la chaîne le 1er janvier 2014, le nombre de 800 000 sera atteint à la fin de la 13 année; soit en 2013.

∼