Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 4

Note

...../20

Remarque : Calculatrice en mode examen. Sujet à rendre avec la copie.

Merci, bonne épreuve à tous.

Exercice 1 (......../6 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$, avec a et b deux nombres réels. On note f' sa fonction dérivée.
   On a alors :
   - **a.** $f'(x) = x + be^x$
   - **b.** $f'(x) = a + e^x$
   - **c.** $f'(x) = (ax + a + b)e^x$
   - **d.** $f'(x) = (2a + b)e^x$

2. On considère toujours la même fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$, avec a et b deux nombres réels. On sait de plus que $f(0) = 4$ et que $f'(0) = 2$. On en déduit que :
   - **a.** $f(x) = (-2x+4)e^x$
   - **b.** $f(x) = (4x+2)e^x$
   - **c.** $f(x) = (2x+4)e^x$
   - **d.** $f(x) = (-4x+2)e^x$

3. Esteban va à l'école chaque matin avec une trousse. À la fin de la journée, il oublie sa trousse avec une probabilité de 0,2. Dans l'année le nombre de jours d'école est de 162. On considère que les oublis journaliers sont indépendants les uns des autres. La probabilité qu'il oublie sa trousse 30 fois exactement dans l'année est environ :
   - **a.** $0,19$
   - **b.** $0,07$
   - **c.** $0,60$
   - **d.** $0,36$

4.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise internet régulièrement	760	630	350	1 740
N'utilise pas internet régulièrement	40	70	150	260
Total	800	700	500	2 000

   On définit les événements:
   - I : "Utilise internet régulièrement"
   - T : "L'élève est en terminale".

   D'après le tableau ci-dessus, si l'on prélève un élève au hasard, on peut en déduire que :
   - **a.** $P_T(I) = 0,175$
   - **b.** $P_I(T) = 0,7$
   - **c.** $P(T \cap I) = \dfrac{35}{174}$
   - **d.** $P(I) = 0,87$

5. Soit $g(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$ définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. On note g'' la dérivée seconde de g définie sur $]0;+\infty[$ par $g''(x) = \dfrac{e^x(x^2-4x+6)}{x^4}$.
   On en déduit que :
   - **a.** g est convexe sur $]1;+\infty[$
   - **b.** g est concave sur $]0;1]$
   - **c.** g est concave sur $]0;+\infty[$
   - **d.** g est concave sur $]1;+\infty[$

6. $e^{x^2-1} = 1$. Cette équation a pour solution(s) :

a. -1 et 1 **b.** 0
c. -2 et 2 **d.** $-0,5$ et $0,5$

Solution :

1. On pose $u(x) = ax + b$, $u'(x) = a$, $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$.
   $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (a + ax + b)e^x$
   Réponse c
2. Comme
   $\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 4 \\ f(0) & = & (a \times 0 + b)e^x \end{array}\right.$
   On en déduit que :
   $$\begin{aligned} a \times 0 + b &= 4 \\ b &= 4 \end{aligned}$$
   Comme
   $\left\{\begin{array}{lcl} f'(0) & = & 2 \\ f"(0) & = & (a + a \times 0 + b)e^x \end{array}\right.$
   et comme $b = 4$
   $\left\{\begin{array}{lcl} f'(0) & = & 2 \\ f"(0) & = & (a + a \times 0 + 4)e^x \end{array}\right.$
   On en déduit que :
   $$\begin{aligned} a + a \times 0 + 4 &= 2 \\ a + 4 &= 2 \\ a &= 2 - 4 \\ a &= -2 \end{aligned}$$
   Par conséquent $f(x) = (ax + b)e^x = (-2x + 4)e^x$.
   Réponse a
3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 162$ et $p = 0,2$. D'après la calculatrice, $P(X = 30) \approx 0,07$.
   Réponse b
4. - $P_T(I) = \dfrac{350}{500} = 0,7$
   - $P_I(T) = \dfrac{350}{1740} = 0,2$
   - $P(I) = \dfrac{350}{2000} = \dfrac{35}{200} = 0,175$
   - $P(I) = \dfrac{1740}{2000} = 0,87$

   Réponse d
5. $e^x > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$; $x^4 > 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. Le signe de la fonction g'' dépend du signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 6$.
   Étudions le signe de la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 6$, avec $a = 1$, $b = -4$ et $c = 6$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8$.
   Comme $\Delta < 0$ et que $a > 0$, on en déduit que la fonction $x \mapsto x^2 - 4x + 6$ est strictement positive sur $]0; +\infty[$.
   Ainsi $g''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.
   Comme $g''(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$, alors la fonction g est convexe sur $]0; +\infty[$ et par conséquent convexe sur $]1; +\infty[$.
   Réponse a

Exercice 2 (......../7 points)

Soit f une fonction définie et continue sur $[0;10]$ telle que $f(x) = \dfrac{x}{e^{x-5}}$.

Partie A : Étude de la fonction.

1. Montrer $f'(x) = \dfrac{-x+1}{e^{x-5}}$.
2. Étudier le signe de f'.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4. Montrer que $f(x) = 30$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[0;10]$.
5. Encadrer les valeurs x_1 et de x_2 à 10^{-3} près .

   Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	`Dériver((-x+1)/exp(x-5))` $(-(-x+1)*exp(x-5)-exp(x-5))/((exp(x-5))\wedge 2)$
2	`Factoriser (-(-x + 1) * exp(x - 5) - exp(x - 5)) / ((exp(x - 5))^2)` $(x-2)/(exp(x-5))$

6. A l'aide des résultats du logiciel, donner l'expression factorisée de f''.
7. En déduire la convexité de la fonction f.
8. f admet-elle un point d'inflexion (justifier) ? Si oui, préciser ces coordonnées.

Partie B : Interprétation des résultats.

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 10 000 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$)

Le bénéfice hebdomadaire noté $f(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut :

$$f(x) = \frac{x}{e^{x-5}}$$

1. Pour combien de poulies fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice maximal. Préciser la valeur de ce bénéfice arrondi à la centaine d'euro prés.
2. Combien de poulies l'entreprise doit-elle fabriquer pour réaliser un bénéfice supérieur à 30 000 € ?

Solution :

Partie A :

1. On remarque que f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, or $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

   On pose : $u(x) = x$; $u'(x) = 1$; $v(x) = e^{x-5}$; $v'(x) = e^{x-5}$

   Par conséquent :

$$f'(x) = \frac{1 \times e^{x-5} - xe^{x-5}}{(e^{x-5})^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-5} - xe^{x-5}}{(e^{x-5})^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-5}(1-x)}{(e^{x-5})^2}$$
$$f'(x) = \frac{e^{x-5}(1-x)}{e^{x-5} \times e^{x-5}}$$
$$f'(x) = \frac{\cancel{e^{x-5}}(1-x)}{\cancel{e^{x-5}} \times e^{x-5}}$$
$$f'(x) = \frac{1-x}{e^{x-5}}$$
$$f'(x) = \frac{-x+1}{e^{x-5}}$$

2. Étudions le signe de f' :
   - Étudions le signe de e^{x-5} : $e^{x-5} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   - Étudions le signe de $-x+1$:

$$\begin{aligned} -x+1 &> 0 \\ 1 &> x \\ x &< 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -x+1 &< 0 \\ 1 &< x \\ x &> 1 \end{aligned}$$

On peut donc construire le tableau de signe suivant :

x	0		1		10
e^{x-5}		$+$		$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	
f'		$+$	0	$-$	

3.

x	0		1		10
f'		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^{-4}} = e^4$	$\searrow$	$\frac{10}{e^5}$

4. - f est une fonction continue et strictement croissante sur $[0;1]$. Ses images varient entre $f(0) = 0$ et $f(1) = e^4 \approx 54,6$. D'après la propriété du théorème de valeurs intermédiaires, $f(x) = 30$ admet une unique solution sur $[0;1]$.

- f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[1;10]$. Ses images varient entre $f(1)=e^4 \approx 54,6$ et $f(10)=\dfrac{10}{e^5} \approx 0,07$. D'après la propriété du théorème de valeurs intermédiaires, $f(x)=30$ admet une unique solution sur $[1;10]$.
- Par conséquent $f(x)=30$ admet deux solutions sur $[0;10]$.

5. A la calculatrice, on en déduit que : $0,262 < x_1 < 0,263$ et $2,525 < x_2 < 2,526$.

6. En interprétant les résultats donnés par le logiciel de calcul formel, on déduit que : $f''(x)=\dfrac{x-2}{e^{x-5}}$.

7. Étudions le signe de f'' :

- Étudions le signe de e^{x-5}. $e^{x-5}>0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Étudions le signe de $x-2$:

$$\begin{aligned} x-2 &> 0 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x-2 &< 0 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

On peut donc construire le tableau de signe suivant :

x	0		2		10
e^{x-5}		$+$		$+$	
$x-2$		$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	

- $f''(x)<0$ sur $[0;2[$, par conséquent la fonction f est concave sur $[0;2[$.
- $f''(x)>0$ sur $]2;10]$, par conséquent la fonction f est convexe sur $]2;10]$.

8. f admet un point d'inflexion au point abscisse 2, car :

- $f''(2)=0$.
- f'' change de signe au point d'abscisse 2. Donc f change de convexité au point d'abscisse 2.

Ce point d'inflexion a pour coordonnées : $(2;f(2))$; c'est à dire : $\left(2;\dfrac{2}{e^{-3}}\right)$.

Partie B :

1. D'après la question A.3, f admet un maximum de $e^4 \approx 54,6$ atteint pour $x=1$. On peut donc interpréter que l'entreprise réalise un bénéfice maximal d'environ 54 600 € pour 1 000 poulies fabriquées et vendues.

2. D'après la question A.5, $f(x)>30$ pour $x \in]x_1;x_2[$. Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice d'au moins 30 000 € lorsqu'elle fabrique et vend entre 263 poulies et 2525 poulies.

Exercice 3 (......../7 points)

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note:

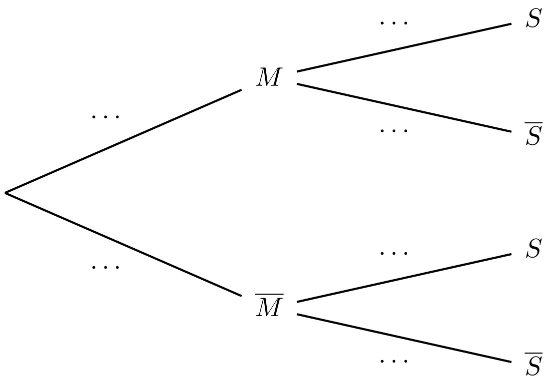
- S l'événement le voyageur fait sonner le portique ;
- M l'événement le voyageur porte un objet métallique .

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que:
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

   a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $P(M)$, $P_M(S)$ et $P_{\overline{M}}(\overline{S})$.

   b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



   c) Montrer que: $P(S) = 0{,}021\,92$.

   d) En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique. (On arrondira le résultat à 10^{-3}.)

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à $0{,}021\,92$.

   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

   c) Sans le justifier, donner la valeur arrondie à 10^{-3} de:
      - la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique;
      - la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

Solution :

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.

On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.

On note:

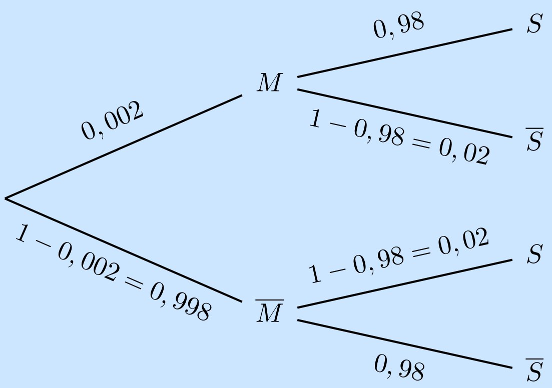
- S l'évènement le voyageur fait sonner le portique ;
- M l'évènement le voyageur porte un objet métallique .

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que:
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à $0,98$;
   - Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à $0,98$.

   a) Daprès l'énoncé, $P(M) = \dfrac{1}{500} = 0,002$, $P_M(S) = 0,98$ et $P_{\overline{M}}\left(\overline{S}\right) = 0,98$.

b) L'arbre pondéré ci-dessous illustre cette situation :



c) D'après la formule des probabilités totales :
$P(S)=P(S\cap M)+P\left(S\cap\overline{M}\right)=P_M(S)\times P(M)+P_{\overline{M}}(S)\times P\left(\overline{M}\right)=0,002\times 0,98+0,998\times 0,02=0{,}021\,92.$

d) Par définition : $P_S(M)=\dfrac{P(M\cap S)}{P(S)}=\dfrac{P_M(S)\times P(M)}{P(S)}=\dfrac{0,002\times 0,98}{0,02192}\approx 0,089$

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,021 92.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a) On répète de manière identique et indépendante (situation assimilée à un tirage avec remise) 80 fois de suite cette épreuve. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n=80$ et $p=0{,}021\,92$.

b) L'espérance d'une loi binomiale est : $E(X)=n\times p=80\times 0{,}021\,92=1{,}753\,6$.
Donc par groupe de 80 personnes le portail sonnera un peu moins de 2 fois.

c) On donne les valeurs arrondies à 10^{-3} de:

- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique:
$p(X\geqslant 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-(1-0{,}021\,92)^{80}\approx 0,830.$
- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique:
$p(X\leqslant 5)\approx 0,992$ (à la calculatrice).

$\sim$