Composition N^{o}2

Remarque : Faire le sujet de spécialité sur une autre copie, en indiquant le nom du professeur de spécialité sur la copie.

Merci, bonne épreuve à tous.

Exercice 1 (......../5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponse est exacte.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Aucune justification n'est demandée.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse choisie.

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.
   La valeur exacte de $f'(\mathrm{e})$ est :
   a) 0 b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ c) 1 d) e^2
2. Entre janvier 2005 et décembre 2012, le prix hors taxe du tarif réglementé du gaz a augmenté de 80 %.
   Quel est le taux annuel d'augmentation du prix du gaz sur la même période arrondi à 0,01 %?
   a) 10 % b) 7,62 % c) 6,75 % d) 8,76 %
3. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q=1,05$ et de premier terme $u_1=3$. La valeur exacte de $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{49}$ est égale à:
   a) $S=\dfrac{1-1,05^{49}}{1-1,05}$ b) $S=3\times\dfrac{1+1,05^{49}}{1+1,05}$ c) $S=595,280$ d) $S=3\times\dfrac{1-1,05^{49}}{1-1,05}$
4. Soit g la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=e^{-3x}+e^2$.
   Alors g' est :
   a) strictement négative sur $\mathbb{R}$ b) strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ c) concave sur $\mathbb{R}$ d) admet un point d'inflexion d'abscisse 0
5. Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses ?
   a) 0,20 b) 0,62 c) 0,38 d) 0,58

Solution :

1. Soit f la fonction continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ définie par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.
   La valeur exacte de $f'(\mathrm{e})$ est:
   a) $\boxed{0}$
   b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$
   c) 1
   d) e^2

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\text{ donc } f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
$$f'(\mathrm{e})=\frac{1-\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e}^2}=\frac{1-1}{\mathrm{e}^2}=0$$

2. Entre janvier 2005 et décembre 2012, le prix hors taxe du tarif réglementé du gaz a augmenté de 80 %.
   Quel est le taux annuel d'augmentation du prix du gaz sur la même période arrondi à 0,01 %?
   a) 10 %
   b) $\boxed{7,62\,\%}$

c) $6,75\,\%$

d) $8,76\,\%$

> Augmenter de $80\,\%$, c'est multiplier par $1,8$.
> Il y a 8 années entre janvier 2005 et décembre 2012, donc on cherche le taux t tel que $(1+t)^8 = 1,8$.
> On a donc $1+t = 1,8^{\frac{1}{8}}$ donc $1+t \approx 1{,}076\,2$ qui correspond à une augmentation annuelle de $7,62\,\%$.

3. Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q = 1,05$ et de premier terme $u_1 = 3$.

   La valeur exacte de $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{49}$ est égale à:

   a) $S = \dfrac{1-1,05^{49}}{1-1,05}$

   b) $S = 3 \times \dfrac{1+1,05^{49}}{1+1,05}$

   c) $S = 595,280$

   d) $\boxed{S = 3 \times \dfrac{1-1,05^{49}}{1-1,05}}$

   > On applique la formule $S = \text{premier terme} \times \dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$

4. Soit g la fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-3x} + e^2$.

   Alors g' est :

   a) $\boxed{\text{strictement négative sur } \mathbb{R}}$

   b) strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

   c) concave sur $\mathbb{R}$

   d) admet un point d'inflexion d'abscisse 0.

   $f'(x) = -3e^{-3x}$, $-3 < 0$ et $e^{-3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, $-3e^{-3x} < 0$ et $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

5. Pour la recherche d'un emploi, une personne envoie sa candidature à 25 entreprises. La probabilité qu'une entreprise lui réponde est de 0,2 et on suppose que ces réponses sont indépendantes. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, que la personne reçoive au moins 5 réponses ?

   a) 0,20

   b) 0,62

   c) 0,38

   d) $\boxed{0{,}58}$

   Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0,25$.

   $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leqslant 4) \approx 1 - 0,42 \approx 0,58$

Exercice 2 (......../5 points)

Une colonie de vacances héberge des enfants dans des tentes de 10 places chacune. Pendant l'été 2017, 160 enfants ont participé à cette colonie.

À la suite d'une étude prévisionnelle, on estime que, chaque année, $80\,\%$ des enfants déjà inscrits se réinscrivent l'année suivante et 50 nouveaux enfants les rejoignent.

1. a) Donner une estimation du nombre d'enfants inscrits à l'été 2018.
   b) Donner le nombre minimal de tentes nécessaire pour loger l'ensemble des inscrits pendant l'été 2018.
2. Soit (u_n) la suite numérique qui modélise le nombre d'inscrits lors de l'année $2017+n$. Ainsi $u_0 = 160$.
   Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, on a: $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.
3. Voici la copie d'écran d'une feuille de tableur utilisée pour déterminer les valeurs des termes de la suite.

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160					

a) Quelle formule peut-on saisir dans la cellule `C2` pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017+n$?

b) Recopier et compléter ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier.

c) Donner une estimation du nombre d'inscrits en 2021.

4. Soit (v_n) la suite numérique dont le terme général est défini par $v_n = u_n - 250$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et préciser son terme initial.

b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 250 - 90 \times 0,8^n$.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. En 2017, la colonie comptait 22 tentes.
Afin de déterminer à partir de quelle année il sera nécessaire de construire une nouvelle tente, on propose l'algorithme ci-dessous:

```
U ← 160
N ← 0
Tant que .................. faire
        U ← 0,8U + 50
        N ← .........
Fin tant que
```

a) Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il permette de répondre au problème.

b) Quelle est la valeur de N obtenue après exécution de cet algorithme?

Solution :

Une colonie de vacances héberge des enfants dans des tentes de 10 places chacune. Pendant l'été 2017, 160 enfants ont participé à cette colonie. À la suite d'une étude prévisionnelle, on estime que, chaque année, 80 % des enfants déjà inscrits se réinscrivent l'année suivante et 50 nouveaux enfants les rejoignent.

1. a) Il y a 160 inscrits en 2017. On en garde 80 % donc on en garde $160 \times \dfrac{80}{100} = 128$.
Comme il y a 50 nouveaux, cela fait $128 + 50 = 178$ inscrits pour 2018.

b) Pour loger 178 enfants dans des tentes de 10 places, il faut 18 tentes.

2. Soit (u_n) la suite numérique qui modélise le nombre d'inscrits lors de l'année $2017+n$. Ainsi $u_0 = 160$.
Prendre 80 %, c'est multiplier par $0,8$.
Comme il y a 50 nouveaux chaque année, on passe du nombre d'inscrits l'année n à l'année $n+1$ en multipliant par $0,8$ puis en ajoutant 50; donc, pour tout n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

3. Voici la copie d'écran d'une feuille de tableur utilisée pour déterminer les valeurs des termes de la suite.

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160					

a) La formule que l'on peut saisir dans la cellule `C2` pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017+n$ est `= 0.8*B2 + 50`.

b) On complète ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier:

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160	178	192	204	213	221

c) $2021 = 2017 + 4$ donc une estimation du nombre d'inscrits en 2021 est $u_4 = 213$.

4. Soit (v_n) la suite numérique dont le terme général est défini par $v_n = u_n - 250$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc on a: $u_n = v_n + 250$.

a)
- $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8u_n + 50 - 250 = 0,8\,(v_n + 250) - 200 = 0,8v_n + 200 - 200 = 0,8v_n$
- $v_0 = u_0 - 250 = 160 - 250 = -90$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de terme initial $v_0 = -90$.

b) On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -90 \times 0,8^n$.

c) $v_n = -90 \times 0,8^n$ et $u_n = v_n + 250$ donc, pour tout n, $u_n = 250 - 90 \times 0,8^n$.

d) La suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et $0 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0. Comme $u_n = v_n + 250$, on en déduit que la suite (u_n) a pour limite 250.
Cela veut dire que si le modèle est correct, le nombre d'inscrits va tendre vers 250.

5. En 2017, la colonie comptait 22 tentes donc pouvait loger 220 enfants.

Il faudra construire une nouvelle tente quand le nombre d'enfants dépassera 220.

Afin de déterminer à partir de quelle année il sera nécessaire de construire une nouvelle tente, on propose un algorithme.

a) On complète l'algorithme proposé:

```
U ← 160
N ← 0
Tant que U ⩽ 220 faire
        U ← 0,8U + 50
        N ← N + 1
Fin tant que
```

b) On a calculé dans le tableau $u_5 = 221 > 220$ donc la valeur de N après exécution de cet algorithme est 5.

Exercice 3 (......../5 points)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par

$$f(x) = \frac{x + 2 - \ln(x)}{x},$$

a) On admet que f est dérivable sur $[1\,;\,25]$.
Démontrer que pour tout réel x appartient à l'intervalle $[1\,;\,25]$,

$$f'(x) = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2},$$

b) Résoudre dans $[1\,;\,25]$ l'inéquation $-3 + \ln(x) > 0$.

c) En déduire le tableau de signe de f' et dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$.

d) Démontrer que dans l'intervalle $[1\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution. On notera α cette solution.

e) Déterminer un encadrement d'amplitude $0,01$ de α à l'aide de la calculatrice.

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.
En utilisant les résultats obtenus à la question **1.**:

a) Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal.
Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.
En déduire le coût total de fabrication correspondant, au centime d'euros près.

b) Déterminer le nombre minimal de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à $1,50$ euro.

c) Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes? Justifier.

Solution :

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ par $f(x) = \dfrac{x + 2 - \ln(x)}{x}$,

a) On admet que f est dérivable sur $[1\,;\,25]$. Pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;\,25]$:

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x + 2 - \ln(x)$ et $v(x) = x$.

En écrivant $u'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$,

$$f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \times x - (x + 2 - \ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{x - 1 - x - 2 + \ln(x)}{x^2} = \frac{-3 + \ln(x)}{x^2}$$

b) Sur $[1\,;\,25]$, on a $-3 + \ln(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln(x) > 3 \Longleftrightarrow x > \mathrm{e}^3$ donc $x \in [\mathrm{e}^3\,;\,25]$

c) Pour tout $x \in [1\,;\,25]$, $f'(x)$ a le même signe que $-3 + \ln(x)$.

$f(\mathrm{e}^3) = \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3} \approx 0,950$ et $f(25) = \dfrac{27 - \ln(25)}{25} \approx 0,951$.

Donc le tableau de variations de la fonction f sur $[1\,;\,25]$ est :

x	1		e^3		25
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3}$	$\nearrow$	$\dfrac{27 - \ln(25)}{25}$

d) Sur l'intervalle $\left[1\,;\,\mathrm{e}^3\right]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Or $1,5 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3}\,;\,3\right]$. D'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[1\,;\,\mathrm{e}^3\right]$.

Sur l'intervalle $[\mathrm{e}^3\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ n'admet aucune solution car

$1,5 \notin \left[\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3}\,;\,\dfrac{27 - \ln(25)}{25}\right]$.

Donc dans l'intervalle $[1\,;\,25]$, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une seule solution.

e) À l'aide de la calculatrice, $\alpha \in]2,31\,;\,2,32[$

2. Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et 2 500 pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.

On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est de $f(x)$ euros.

a) D'après la question **1. c**, le coût moyen minimal est obtenu pour $x = \mathrm{e}^3$ centaines de pièces, soit pour environ 2 009 pièces.

Le coût moyen minimal sera de $\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3}$ soit environ 0,950 euro. On calcule le coût total en multipliant le coût moyen par le nombre de pièces fabriquées.

($CTM = \dfrac{C_T}{q} \Leftrightarrow C_T = CTM \times q$; CTM coût moyen, C_T : coût total, q : quantité).

Ainsi le coût total correspondant sera $\dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3} \times e^3 \times 100 = (e^3 - 1) \times 100$ (ou de manière approximative $0,95 \times 2009$) soit environ 1 908,55 euros.

b) D'après la question **1. d**, le nombre minimal de pièces à fabriquer sera de 2,32 centaines de pièces, soit environ 232 pièces.

c) Il sera impossible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes (0,50 euro), car sur l'intervalle $[1\,;\,25]$ (de 1 à 2 500 pièces), $f(x) \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^3 - 1}{\mathrm{e}^3}$ soit un coût minimal d'environ $0,95$ euro.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui ne suivent PAS L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ.

Les résultats numériques seront donnés, si nécessaire, sous forme approchée à 0,001 près.

Partie A

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.

Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que:

40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise;

20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise;

80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

A : l'employé fait partie du service A ;

B : l'employé fait partie du service B ;

C : l'employé fait partie du service C ;

T : l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité d'un évènement E est notée $P(E)$ et celle de E sachant F est notée $P_F(E)$.

1. a) Justifier que $P(A) = 0,45$.
   b) Donner $P_A(T)$.
   c) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.
2. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A et qu'il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail.
3. Montrer que $P(T) = 0,482$.
4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
5. On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement 2 d'entre eux résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail.

Partie B

Soit Y une variable aléatoire associant l'indemnité de transport versée par l'employeur aux employés de l'entreprise.

Les employés reçoivent les indemnités suivantes :

- Pour les employés résidant à plus de 30 minutes de leur lieu de travail :
  - 10€ pour les employés du service A
  - 20€ pour les employés du service B
  - 30€ pour les employés du service C
- Pour les employés résidant à moins de 30 minutes de leur lieu de travail. Ces derniers ne reçoivent pas d'indemnités.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Y ?
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
3. Calculer $E(Y)$ et interpréter le résultat.

Solution :

Partie A

Une entreprise est composée de 3 services A, B et C d'effectifs respectifs 450, 230 et 320 employés.

Une enquête effectuée sur le temps de parcours quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que:

40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise;

20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise;

80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise.

On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

A : l'employé fait partie du service A ;

B : l'employé fait partie du service B ;

C : l'employé fait partie du service C ;

T : l'employé réside à moins de 30 minutes de l'entreprise.

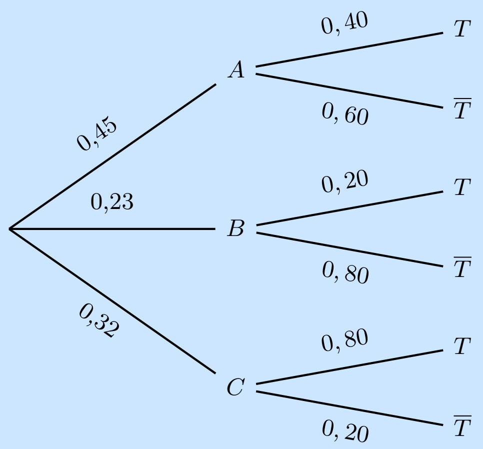
1. a) Le nombre d'employés du service A est 450. Le nombre total d'employés est $450 + 230 + 320 = 1\,000$. La probabilité de choisir au hasard un employé du service A est donc $P(A) = \dfrac{450}{1\,000} = 0,45$.

   b) On sait que 40 % des employés du service A résident à moins de 30 minutes de l'entreprise, donc $P_A(T) = 0,40$.

   c) On calcule les différentes probabilités à placer dans l'arbre.

   - Comme pour le calcul de $P(A)$, on a $P(B) = \dfrac{230}{1\,000} = 0,23$ et $P(C) = \dfrac{320}{1\,000} = 0,32$.
   - On sait que $P_A(T) = 0,40$ donc $P_A(\overline{T}) = 1 - 0,40 = 0,60$.
   - On sait que 20 % des employés du service B résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_B(T) = 0,20$ et donc $P_B(\overline{T}) = 1 - 0,20 = 0,80$.
   - On sait que 80 % des employés du service C résident à moins de 30 minutes de l'entreprise donc $P_C(T) = 0,80$ et donc $P_C(\overline{T}) = 1 - 0,80 = 0,20$.

   On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré:



2. L'employé choisi est du service A et il réside à moins de 30 minutes de son lieu de travail est l'événement $A \cap T$:
   $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,45 \times 0,40 = 0,18$.

3. D'après la formule des probabilités totales:
   $$\begin{aligned} P(T) &= P(A \cap T) + P(B \cap T) + P(C \cap T) = P(A) \times P_A(T) + P(B) \times P_B(T) + P(C) \times P_C(T) \\ &= 0,18 + 0,23 \times 0,20 + 0,32 \times 0,80 = 0,482. \end{aligned}$$

4. Sachant qu'un employé de l'entreprise réside à plus de 30 minutes de son lieu de travail (événement $\overline{T}$), la probabilité qu'il fasse partie du service C est:
   $$P_{\overline{T}}(C) = \frac{P(C \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(C) \times P_C(\overline{T})}{1 - P(T)} = \frac{0,32 \times 0,20}{1 - 0,482} \approx 0,124.$$

5. On choisit successivement de manière indépendante 5 employés de l'entreprise. On considère que le nombre d'employés est suffisamment grand pour que ce tirage soit assimilé à un tirage avec remise.

   La variable aléatoire N qui donne le nombre d'employés qui résident à moins de 30 minutes de leur lieu de travail suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = P(T) = 0,482$.

   $P(N = 2) = \binom{5}{2}\, 0,482^2\, (1 - 0,482)^{5-2} \approx 0,323$.

Partie B

1. Y prend les valeurs 0,10,20 et 30.

2. • $P(Y=0) = P(T) = 0,482$, d'après la question 3 partie a.
   • $P(Y=10) = P(A \cap \overline{T}) = P(A) \times P_A(\overline{T}) = 0,45 \times 0,6 = 0,27$
   • $P(Y=20) = P(B \cap \overline{T}) = P(B) \times P_B(\overline{T}) = 0,23 \times 0,8 = 0,184$
   • $P(Y=30) = P(C \cap \overline{T}) = P(C) \times P_C(\overline{T}) = 0,32 \times 0,2 = 0,064$

y_i	0	10	20	30
$P(Y=y_i)$	0,482	0,27	0,184	0,064

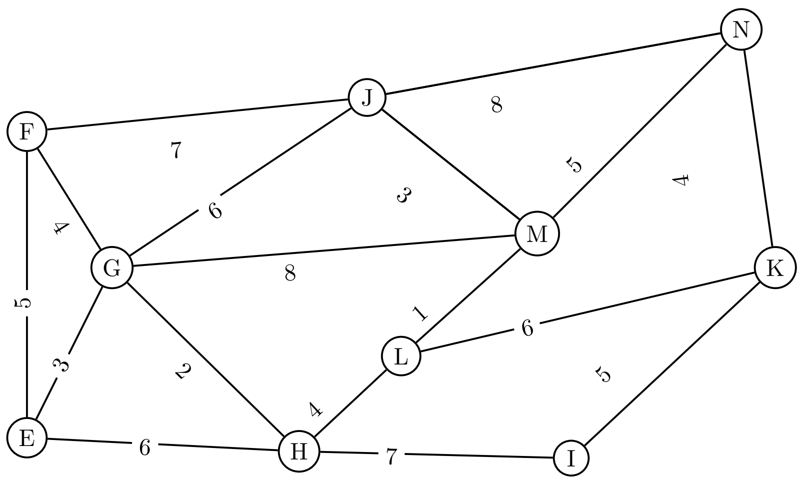
3. $E(Y) = 0 \times 0,482 + 10 \times 0,27 + 20 \times 0,184 + 30 \times 0,064 = 8,3$.
   En moyenne un employé reçoit une indemnité de 8,3€.

Exercice 4 (......../5 points)

A traiter pour ceux qui suivent L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ.

Deux amis, Louisa et Antoine, passent la journée dans un parc d'attraction.

Le plan du parc est donné par le graphe Γ ci-dessous. Les arêtes de ce graphe représentent les allées du parc et les sommets correspondent aux intersections de ces allées. On a pondéré les arêtes de ce graphe par les temps de parcours en minutes.



1. Le graphe est-il connexe ? Justifier.
2. Antoine prétend avoir trouvé un itinéraire permettant d'emprunter chaque allée une et une seule fois mais Louisa lui répond que c'est impossible.
   Lequel des deux a raison ? Justifier la réponse.
3. On considère la matrice M ci-dessous (a, b et c sont des entiers).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   a) Déterminer les entiers a, b et c pour que la matrice M représente la matrice d'adjacence associée au graphe Γ, les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique.

   Soit S la matrice définie par : $S = M + M^2 + M^3$.
   On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 7 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 2 & 8 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & 10 & 1 & 10 & 5 & 2 & 11 & 3 \\ 7 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & 0 & 8 & 2 & 5 \\ 4 & 8 & 10 & 5 & 2 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 5 & 2 & 0 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & 0 & 4 & 7 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 11 & 2 & 4 & 8 & 1 & 8 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 0 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 9 & 2 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 12 & 5 & 2 & 10 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 11 & 12 & 13 & 12 & 2 & 13 & 5 & 4 & 13 & 5 \\ 9 & 5 & 12 & 6 & 7 & 6 & 2 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 10 & 13 & 6 & 2 & 10 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 3 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 2 & 5 & 8 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 13 & 4 & 4 & 11 & 3 & 9 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant F à L.
Préciser ces chemins.

c) Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 partant de E.

d) Que signifie le coefficient à l'intersection de la première ligne et de la troisième colonne de S ?

4. Un défilé part tous les jours à 14 h du sommet N. Louisa et Antoine choisissent de déjeuner dans un restaurant situé au sommet E avant d'aller admirer le défilé.

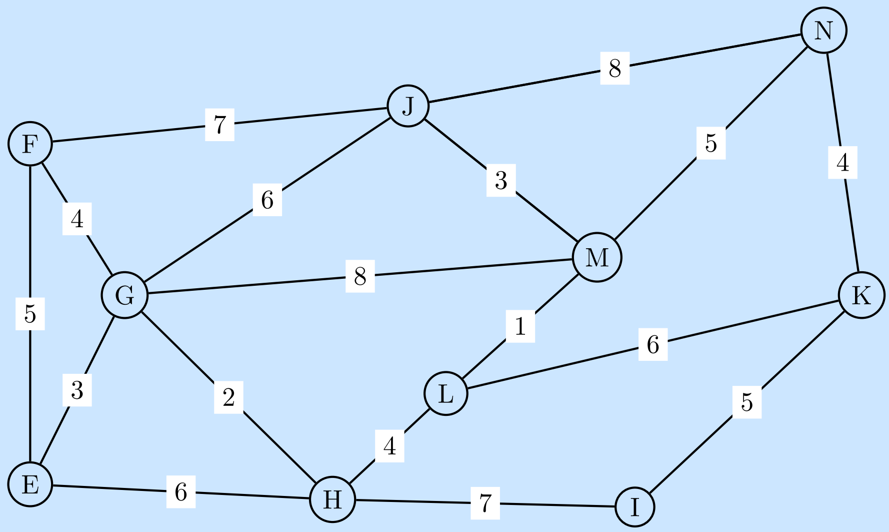
   a) À l'aide d'un algorithme, déterminer le chemin que doivent emprunter Louisa et Antoine pour se rendre du restaurant au départ du défilé le plus rapidement.

   b) À quelle heure au plus tard doivent-ils quitter le restaurant pour assister au début du défilé ?

Solution :

Deux amis, Louisa et Antoine, passent la journée dans un parc d'attraction.

Le plan du parc est donné par le graphe Γ ci-dessous. Les arêtes de ce graphe représentent les allées du parc et les sommets correspondent aux intersections de ces allées. On a pondéré les arêtes de ce graphe par les temps de parcours en minutes.



1. Le chemin F – E – G – J – N – M – L – H – I – K passe par tous les sommets du graphe Γ donc deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaine; le graphe Γ est donc connexe.

2. Antoine prétend avoir trouvé un itinéraire permettant d'emprunter chaque allée une et une seule fois mais Louisa lui répond que c'est impossible.

   Pour trouver un itinéraire permettant d'emprunter chaque allée une et une seule fois, il faudrait, d'après le théorème d'Euler, qu'il y ait 0 ou 2 sommets de degrés impairs. Or il y a 6 sommets de degrés impairs, F, E, G, L, N, K, donc un tel itinéraire n'est pas possible; Louisa a raison.

3. On considère la matrice M ci-dessous (a, b et c sont des entiers).

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   a) Les sommets dans l'ordre alphabétique sont E - F - G - H - I - J - K - L - M - N; le nombre a se trouve sur la 1 ligne, correspondant au commet E, et sur la 5 colonne, correspondant au sommet I, donc ce nombre donne le nombre d'arêtes reliant E et I: d'après le graphe, $a = 0$.

   Le nombre b se trouve sur la 7 ligne, correspondant au commet K, et sur la 5 colonne, correspondant au sommet I, donc ce nombre donne le nombre d'arêtes reliant K et I: d'après le graphe, $b = 1$.

   Le nombre c se trouve sur la 5 ligne, correspondant au commet I, et sur la 7 colonne, correspondant au sommet K, donc ce nombre donne le nombre d'arêtes reliant I et K: d'après le graphe, $c = 1$.

   On aurait également pu dire que, comme le graphe n'est pas orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique par rapport à la 1 diagonale, donc $a = 0$ et $c = b$.

   Soit S la matrice définie par : $S = M + M^2 + M^3$. On admet que :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 7 & 1 & 4 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 2 & 8 & 1 & 4 & 4 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & 10 & 1 & 10 & 5 & 2 & 11 & 3 \\ 7 & 3 & 10 & 2 & 6 & 5 & 0 & 8 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 6 & 0 & 2 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 10 & 5 & 2 & 6 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 5 & 2 & 0 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & 0 & 4 & 7 & 0 & 8 & 1 \\ 5 & 4 & 11 & 2 & 4 & 8 & 1 & 8 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 0 & 7 & 6 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 9 & 2 & 6 & 2 & 3 & 6 & 3 \\ 9 & 7 & 12 & 5 & 2 & 10 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 11 & 12 & 13 & 12 & 2 & 13 & 5 & 4 & 13 & 5 \\ 9 & 5 & 12 & 6 & 7 & 6 & 2 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 10 & 13 & 6 & 2 & 10 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 3 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 9 & 2 & 5 & 8 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 6 & 13 & 4 & 4 & 11 & 3 & 9 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

   b) Le nombre de chemins de longueur 3 reliant un sommet à un autre est donné par la matrice M^3. Le sommet F est le 2, le sommet L est le 8 donc le nombre de chemins reliant F et L est le coefficient de la matrice M^3 situé sur la 2 ligne et la 8 colonne: c'est 4.

   Les chemins sont: F - E - H - L ; F - J - M - L ; F - E - M - L et F - G - H - L.

   c) Les nombres de chemins de longueur 3 partant de E sont situés sur la ligne 1 de la matrice M^3; il y en a en tout: $4 + 7 + 8 + 7 + 1 + 4 + 2 + 2 + 5 + 3 = 43$.

   d) $S = M + M^2 + M^3$ donc les coefficients de la matrice S donnent le nombre de chemins de longueur 1, 2 ou 3, reliant deux sommets du graphe.

   Le coefficient à l'intersection de la première ligne (sommet E) et de la troisième colonne (sommet G) de S est 11; donc il y a 11 chemins de longueurs 1, 2 ou 3, reliant E et G.

4. Un défilé part tous les jours à 14 h du sommet N. Louisa et Antoine choisissent de déjeuner dans un restaurant situé au sommet E avant d'aller admirer le défilé.

   a) À l'aide de l'algorithme de Dijsktra, on va déterminer le chemin que doivent emprunter Louisa et Antoine pour se rendre du restaurant au départ du défilé le plus rapidement:

E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	E
	∞ 5 E	∞ 3 E	∞ 6 E	∞	∞	∞	∞	∞	∞	G (3)
	5 E 7 G		6 E 5 G	∞	∞ 9 G	∞	∞	∞ 11 G	∞	F (5)
			5 G	∞	9 G 12 F	∞	∞	11 G	∞	H (5)
				∞ 12 H	9 G	∞	∞ 9 H	11 G	∞	J (9)
				12 H		∞	9 H	11 G 12 J	∞ 17 J	L (9)
				12 H		∞ 15 L		11 G 10 L	17 J	M (10)
				12 H		15 L			17 J 15 M	I (12)
						15 L 17 I			15 M	K (15)
									15 M 19 K	N (15)

Le trajet le plus rapide est: E $\xrightarrow{3}$ G $\xrightarrow{2}$ H $\xrightarrow{4}$ L $\xrightarrow{1}$ M $\xrightarrow{5}$ N; sa durée est de 15 minutes.

b) Le trajet le plus court dure 15 minutes, donc Louisa et Antoine doivent partir au plus tard à 13 h 45 de E pour être à 14 h au défilé.