Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 5

Note

...../10

Exercice 1 (......../1.5 points)

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + 5x - 3$, définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x}$, définie et continue sur $]0; +\infty[$.
3. $h(x) = 5e^x - x^2 + 4$, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. $F(x) = ln(x) + 5\dfrac{x^2}{2} - 3x + C = ln(x)\dfrac{5}{2}x^2 - 3x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
2. $G(x) = -\dfrac{1}{x} - 3ln(x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
3. $H(x) = 5e^x - \dfrac{x^3}{3} + 4x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (......../1 point)

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 + 4x^2 - 5x + 2$$

1. Déterminer les primitives de f.
2. Déterminer l'unique primitive f qui s'annule pour $x = 1$.

Solution :

1. Les primitives f sont les fonctions F de la forme :
$F(x) = \dfrac{x}{5} + 4 \times \dfrac{x^3}{3} - 5 \times \dfrac{x^2}{2} + 2x + C = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.
2.

$$\begin{aligned}
F(0) &= 0 \\
\frac{1}{5} \times 1^5 + \frac{4}{3} \times 1^3 - \frac{5}{2} \times 1^2 + 2 \times 1 + C &= 0 \\
\frac{1}{5} + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 2 + C &= 0 \\
\frac{6}{30} + \frac{40}{30} - \frac{75}{30} + \frac{60}{30} + C &= 0 \\
\frac{6 + 40 - 75 + 60}{30} + C &= 0 \\
\frac{46 - 15}{30} + C &= 0 \\
\frac{31}{30} + C &= 0 \\
C &= -\frac{31}{30}
\end{aligned}$$

L'unique primitive de f, F telle que $F(1) = 0$ a pour expression :

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{31}{30}$$

Exercice 3 (......../2 points)

Déterminer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 10x - 2e^x)\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x+3}\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^3 2xe^{x^2}\, dx$
4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\, dx$

Solution :

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 10x - 2e^x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + 10 \times \frac{x^2}{2} - 2e^x\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3} + 10 \times \frac{1^2}{2} - 2e^1\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 10 \times \frac{0^2}{2} - 2e^0\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{2} - 2e\right) - (-2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} + \frac{10}{2} \times \frac{3}{3} - 2e + 2 \times \frac{6}{6} = \frac{2}{6} + \frac{30}{6} - 2e + \frac{12}{6} = \frac{44}{6} - 2e = \frac{22}{3} - 2e.$

2. $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x+3}\, dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x+3}\right]_0^1 = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+3}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2\times1+3} - (-\frac{1}{2}e^{-2\times0+3}) = -\frac{1}{2}e^1 + \frac{1}{2}e^3 = \frac{e^3 - e}{2}$

3. $\displaystyle\int_0^3 2xe^{x^2}\, dx = \left[e^{x^2}\right]_0^3 = e^{3^2} - e^{0^2} = e^9 - e^0 = e^9 - 1$

4. $\displaystyle\int_1^3 \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}\, dx = \left[4ln(x) - \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^3 = \left[4ln(x) + \frac{1}{x}\right]_1^3 = \left(4ln(3) + \frac{1}{3}\right) - \left(4ln(1) + \frac{1}{1}\right) = (4ln(3) + \frac{1}{3}) - (0+1) = 4ln(3) + \frac{1}{3} - 1 = 4ln(3) - \frac{2}{3} = \frac{12ln(3) - 2}{3}$

Exercice 4 (......../1 point)

Soit $f(x) = ln(x) - 3$ et $F(x) = x(ln(x) - 4)$ deux fonctions définies et continues sur $]0; +\infty[$.

Montrer que F est une primitive de f.

Solution :

F est une primitive f si et seulement si $F' = f$.

F est de la forme uv, on pose :

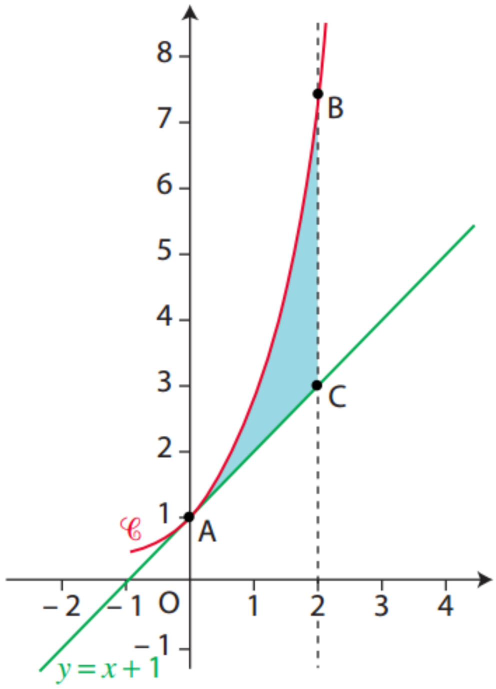
$u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x)ln(x) - 4$, $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\begin{aligned} F(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x); \\ &= 1 \times (ln(x) - 4) + x \times \frac{1}{x} \\ &= ln(x) - 4 + 1 \\ &= ln(x) - 3 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

F est bien primitive de f.

Exercice 5 (......../2 points)

Déterminer la valeur exacte, puis arrondie à 10^{-2} de l'aire du domaine coloré en bleu situé entre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction exponentielle ($f(x) = e^x$) et la tangente à $\mathscr{C}$ en le point A d'abscisse 0 ($y = x + 1$), en unités d'aire.



Solution :

L'aire comprise entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x + 1$ sur l'intervalle $[0; 2]$ se traduit par le calcul de l'intégrale :

$$\int_0^2 e^x - (x+1)\,dx = \int_0^2 e^x - x - 1\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^x - x - 1\,dx &= \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 \\
&= \left(e^2 - \frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(e^0 - \frac{0^2}{2} - 0\right) \\
&= e^2 - \frac{4}{2} - 2 - (1 - 0 - 0) \\
&= e^2 - 2 - 2 - 1 \\
&= e^2 - 5 \\
&\approx 2,29
\end{aligned}$$

L'aire entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente au point sur l'intervalle $[0; 2]$ mesure $e^2 - 5$ unités d'aire. Soit approximativement $2,29$ unités d'aire.

Exercice 6 (......../1.5 points)

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11; +\infty[$ par $f(x) = 1782e^{0,024x}$ en billions de barils (millions de millions de barils). On interprète $f(11)$ comme étant le nombre de billions de barils de pétrole découvert en 2011.

Déterminer le nombre **moyen** de barils, en billions, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

Solution :

On applique la formule de la valeur moyenne $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ sur $[11;21]$.

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{21-11}\int_{11}^{21} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{10}\int_{11}^{21} 1782e^{0{,}024x}\,dx \\
&= \frac{1}{10}\times\left[1782\times\frac{1}{0{,}024}e^{0{,}024x}\right]_{11}^{21} \\
&= \frac{1}{10}\times\left[74250e^{0{,}024x}\right]_{11}^{21} \\
&= \frac{1}{10}\times\left(74250e^{0{,}024\times 21}-74250e^{0{,}024\times 11}\right) \\
&= \frac{1}{10}\times\left(74250(e^{0{,}024\times 21}-e^{0{,}024\times 11})\right) \\
&= \frac{1}{10}\times\left(74250(e^{0{,}504}-e^{0{,}264})\right) \\
&= \frac{74250}{10}\times(e^{0{,}504}-e^{0{,}264}) \\
&= 7425\times(e^{0{,}504}-e^{0{,}264}) \\
&= 2623
\end{aligned}$$

On peut espérer découvrir en moyenne par an, d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021 environ 2623 barils.

Exercice 7 (......../1 point)

Dans une entreprise, le coût marginal de fabrication d'un produit est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 20]$ par :

$$Cm(q) = 0,2q^2 + 4 + 0,2e^{0,2q}$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers. d'euros.

Les coûts fixes sont égaux à 3 400 €.

Déterminer C_T la fonction qui modélise le coût total de fabrication exprimée en milliers d'euros en fonction de q quantité exprimée en tonnes.

Solution :

C_T est une primitive de C_m telle que $C_T(0) = 3,4$.

Ainsi $C_T(q) = 0,2 \times \dfrac{q^3}{3} + 4q + e^{0,2q} + C = \dfrac{1}{15}q^3 + 4q + e^{0,2q} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
C_T(0) &= 3,4 \\
\frac{1}{15} \times 0^3 + 4 \times 0 + e^{0,2\times 0} + C &= 3,4 \\
e^0 + C &= 3,4 \\
1 + C &= 3,4 \\
C &= 3,4 - 1 \\
C &= 2,4
\end{aligned}$$

Donc $C_T(q) = \dfrac{1}{15}q^3 + 4q + e^{0,2q} + 2,4$.

$\sim$