Chapitre 9 : Les fractions

1 Les fractions, une nouvelle écriture de la division

Définition 1 a et b désignent deux nombres avec $b \neq 0$. Le quotient de a par b, c'est-à-dire le nombre qui multiplié par b donne a, admet pour écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ (lire "a sur b").

• Conséquence et vocabulaire. D'après cette définition : $b \times \frac{a}{b} = a$.

dividende diviseur

$a : b = \frac{a}{b}$

Dans cette écriture fractionnaire :
le nombre a est le numérateur,
le nombre b est le dénominateur.

Définition 2 Lorsque a et b désignent des nombres entiers, on dit que l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ une fraction.

■ **Exemple 1** $\frac{7}{2}$ se lit "7 demis", $\frac{7}{3}$ se lit "7 tiers", $\frac{7}{4}$ se lit "7 quarts", $\frac{7}{5}$ se lit 7 cinquièmes", ... ■

2 Les fractions, la représentation d'un nombre

2.1 Activité : Enquête sur un problème de gâteaux (partie 1)

Mr Martin organise un banquet, comportant 38 gâteaux similaires comme celui représenté ci-dessous :

1. En combien de parts est découpé ce gâteau ?
 . . . .

2. A la fin de son banquet, Mr Martin constate que ses invités ont laissé quelques restes. Voici un des restes.

On voit que ce reste ne représente pas la totalité d'un gâteau, mais seulement une partie.

- Le nombre de parts restantes est : ....
- Le nombre de parts dans un gâteau complet est de : ....
- Cette partie de gâteau est représentée par la fraction : ....
- On dira qu'il reste le .... d'un gâteau.

3. Faites la même analyse pour les autres restes présents lors du banquet :

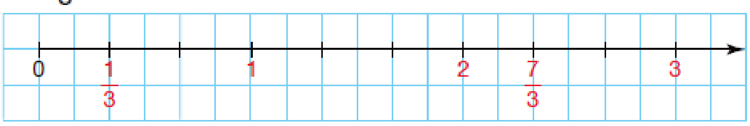
  

• Nombre de parts restantes :	• Nombre de parts restantes :	• Nombre de parts restantes :
....	....	....
• Représenté par la fraction :	• Représenté par la fraction :	• Représenté par la fraction :
....	....	....

2.2 Représentation sur la demi-droite graduée

Pour placer le nombre $\frac{7}{3}$ sur une demi-droite graduée :

- on choisit une unité qui se partage facilement en 3 car le dénominateur est 3 ;
- on utilise le fait que $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$ et on reporte 7 fois le tiers de l'unité (on peut aussi utiliser le fait que $\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$).



Exercice 1 Placer les nombres $\frac{5}{3}$ et $\frac{6}{3}$.

Que remarque t-on pour $\frac{6}{3}$? ....

3 Les fractions, différentes représentations d'un même nombre

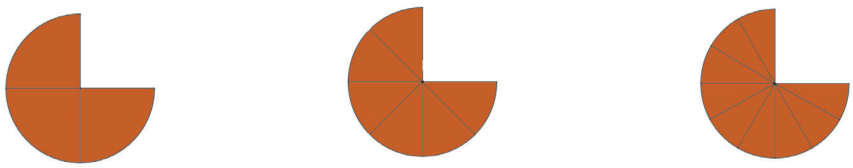
3.1 Activité : Enquête sur un problème de gâteau (partie 2)

Il est intéressant d'observer que $\frac{6}{3} = 2 = \frac{2}{1}$. Grâce aux fractions, un même nombre peut s'écrire de différentes manières.

Par exemple :

est représenté par la fraction $\frac{9}{12}$. On a bien, le 9 douzième d'un gâteau.

1. Considérons les figures ci-dessous comme des gâteaux. Le disque entier représente 1 gâteau.



- Le gâteau est divisé en : .... parts
- Nombre de parts restantes : ....
- Représenté par la fraction : ....

- Le gâteau est divisé en : .... parts
- Nombre de parts restantes : ....
- Représenté par la fraction : ....

- Le gâteau est divisé en : .... parts
- Nombre de parts restantes : ....
- Représenté par la fraction : ....

2. Quel est le point commun entre ces gâteaux ?
   ....
   ....
3. Quel est la différence entre ces gâteaux ?
   ....
   ....
4. Que peut-on conclure ?
   ....
   ....
   ....

3.2 Explication théorique

Propriété 1 Un quotient ne change pas quand on multiplie ou quand on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre différent de 0.

EXEMPLES 1

- $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2 \times 4}{3 \times 4} = \dfrac{8}{12}$
- $\dfrac{18}{14} = \dfrac{18 : 2}{14 : 2} = \dfrac{9}{7}$
- $\dfrac{5,3}{0,25} = \dfrac{5,3 \times 100}{0,25 \times 100} = \dfrac{530}{25}$
- $\dfrac{100}{230} = \dfrac{100 : 10}{230 : 10} = \dfrac{10}{23}$

EXEMPLE 2 **Simplification d'une fraction**

$\dfrac{12}{15} = \dfrac{4 \times 3}{5 \times 3} = \dfrac{4}{5}$

ou bien

$\dfrac{12}{15} = \dfrac{12 : 3}{15 : 3} = \dfrac{4}{5}$

On écrit une fraction égale à $\frac{12}{15}$ mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits ($4 < 12$ et $5 < 15$).
On dit que l'on **simplifie** la fraction $\frac{12}{15}$.

Par conséquent : $\dfrac{9}{12} = \dfrac{3 \times \ldots\ldots}{3 \times \ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ et $\dfrac{6}{8} = \dfrac{2 \times \ldots\ldots}{2 \times \ldots\ldots} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

4 Fraction multipliée par un entier

4.1 Fraction multipliée par un entier

Propriété 2 Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier cette fraction par cette quantité.

EXEMPLE Prendre les trois cinquièmes d'une masse de 20 kg, c'est calculer $\frac{3}{5} \times 20$ kg.

Pour effectuer ce calcul, on peut utiliser l'une des trois méthodes ci-dessous.

1re méthode : on effectue **(3 × 20 kg) : 5**.

$\dfrac{3}{5} \times 20 \text{ kg} = \dfrac{3 \times 20 \text{ kg}}{5}$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{5} \times 20 \text{ kg} = \dfrac{60 \text{ kg}}{5} = 12 \text{ kg}$

2e méthode : on effectue **3 × (20 kg : 5)**.

$\dfrac{3}{5} \times 20 \text{ kg} = 3 \times \dfrac{20 \text{ kg}}{5}$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{5} \times 20 \text{ kg} = 3 \times 4 \text{ kg} = 12 \text{ kg}$

3e méthode : on effectue **(3 : 5) × 20 kg**.

$\dfrac{3}{5} \times 20 \text{ kg} = 0,6 \times 20 \text{ kg}$, c'est-à-dire $\dfrac{3}{5} \times 20 \text{ kg} = 12 \text{ kg}$

En conclusion, prendre les trois cinquièmes de 20 kg, c'est prendre 12 kg.

4.2 Activité : Enquête sur un problème de gâteau (partie 3)

Voici d'autres restes Mr Martin à découvert :

On remarque que ces restes de gâteau peuvent être représentés par une même fraction.

La forme la plus réduite (ou simplfiée) de cette est fraction est : . . . .
Il y a donc 5 fois .... de gâteau.
En tout, il reste : . . . .

5 Somme de fraction (niveau 5ème)

5.1 Activité : Enquête sur un problème de gâteau (partie 4)

Voici la totalité des restes retrouver par Mr Martin :

Ces restes de gâteaux sont respectivement représentés par les fractions : $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$.

Mr Martin souhaite oragniser un autre banquet et pour éviter de faire du gaspillage alimentaire, il désire commander la même quantité de gâteau moins les restes du dernier banquet.

La fraction représentant les restes de gâteau est donc la somme des fractions de chacun de restes :

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

Il est difficile de calculer cette fraction. On sait juste que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=5\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$. Donc la fraction peut s'écrire :

$$\frac{5}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

Ce qui ne nous avance pas beaucoup plus.

1. Découper les restes de gâteaux, assembler-les et coller-les ci-dessous afin de reconstituer un maximum de gâteaux complets.

2. On considère que les gâteaux sont découpés en 12 parts. Combien il y a t-il de parts parmi les restes ? ....
3. Combien il y a t-il de parts dans un gâteau ? ....
4. Écrire le reste de gâteau sous la forme d'une seule fraction :
   ....
5. On remarque que le dénominateur est égal à 12, et l'on sait qu'une fraction peut s'écrire de différentes façons : (Compléter)
   — $\frac{5}{4} = \frac{5\times .....}{4\times .....} = \frac{.......}{12}$
   — $\frac{3}{4} = \frac{3\times .....}{4\times .....} = \frac{.......}{12}$
   — $\frac{2}{3} = \frac{2\times .....}{3\times .....} = \frac{.......}{12}$
   — $\frac{1}{3} = \frac{1\times .....}{3\times .....} = \frac{.......}{12}$
   — $\frac{1}{12}$

   Donc : $\frac{5}{4}+\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12} =$ ....
   On remarque le démominateur 12 ne change pas et que la somme des numérateurs de chaque fraction 15+9+8+4+7=37. La fraction obtenue est $\frac{37}{12}$.
   — Quel semble être le rôle de dénominateur ? ....
   ....
   — Quel semble être le rôle de numérateur ? ....
   ....
   — Pourquoi les fractions doivent-elles avoir le même dénominateur pour en faire la somme ?
   ....
   ....