Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 6

Note .…./10

Exercice 1 (......../1.5 points)

Lorsqu'elle est chez sa grand-mère, Fatou arrive pour prendre son petit déjeuner entre 7 h et 8 h 30, de façon aléatoire. Son cousin Moussa le prend toujours à 8 h et y consacre 15 minutes. L'expérience aléatoire est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[7; 8,5]$.

1. Calculer la probabilité que Fatou arrive avant Moussa.
2. Quelle est la probabilité qu'ils se croisent ?
3. Sachant que Fatou est arrivée après 8 h, quelle est la probabilité qu'elle passe un moment à table avec Moussa ?

Solution :

1. $P(X < 8) = \dfrac{8-7}{8,5-7} = \dfrac{1}{1,5} = \dfrac{2}{3}$.
2. $P(8 < X < 8,25) = \dfrac{8,25-8}{8,5-7} = \dfrac{0,25}{1,5} = \dfrac{1}{6}$.
3. $P(X > 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$

   $P_{X>8}(X < 8,25) = \dfrac{P(8 < X < 8,25)}{P(X > 8)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{1} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 (......../3 points)

X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0; 1]$ dont la loi de probabilité a pour densité la fonction définie par $f(x) = 4x^3$.

1. Montrer que f est une fonction de densité de probabilité sur $[0; 1]$.
2. Calculer $P(0,2 < X < 0,5)$.
3. Calculer $E(X)$.

Solution :

1. • f est continue sur $[0; 1]$.
   • $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0; 1]$
   • $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 4x^3\,dx = \left[4\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left[x^4\right]_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1.$

   f est bien une fonction de densité sur $[0; 1]$.
2.

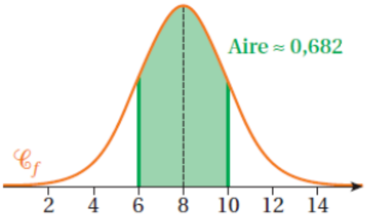
$$\begin{aligned} P(0,2 < X < 0,5) &= \int_{0,2}^{0,5} f(x)\,dx \\ &= \left[x^4\right]_{0,2}^{0,5} \\ &= 0,5^4 - 0,2^4 \\ &= 0,0609 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 xf(x)\,dx \\ &= \int_0^1 4x^4\,dx \qquad = \left[4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 4\frac{1^5}{5} - 4\frac{0^5}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Exercice 3 (......../0.5 points)

On considère X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. À partir de la figure ci-contre où $\mathscr{C}_f$ désigne la courbe représentative de la densité f associée à la variable aléatoire X, préciser la valeur de l'espérance μ et de l'écart-type .



Solution :

On observe que $\mu = 8$, car la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par la droite d'équation $x = 8$.

On sait que : $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,682$.On sait de plus que : $P(6 < X < 10) \approx 0,682$. Comme $P(8 - 2 < X < 8 + 2) \approx 0,682$. Par identification, on en déduit que $\sigma = 2$.

Exercice 4 (......../4 points)

Une entreprise fabrique des appareils de mesure. Les appareils sont conditionnés par lots de 800 pour l'expédition aux usines de montage. On prélève au hasard un lot de 800 appareils. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 800 appareils, associe le nombre d'appareils défectueux. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale d'espérance 40 et d'écart-type 6,2. Les résultats sont à arrondir à 10^{-3} près.

1. Déterminez la probabilité qu'il y ait au entre 35 et 45 appareils défectueux dans le lot.
2. Déterminez la probabilité qu'il y ait au plus 50 appareils défectueux dans le lot.
3. Déterminer le réel d tel que $P(-d < X < d) = 0,5$.
4. Déterminez le réel k tel que $P(X > k) = 0,01$. Donner une interprétation du résultat.

Solution :

X : $\mu = 40$, $\sigma = 6,2$.

1. $P(35 < X < 45) \approx 0,580$.
2. $P(X < 50) \approx 0,947$.
3. Question ambiguë. Point accordé. $P(X < 40) = P(-40 < X < 40) = 0,5$. $d = 40$.
4.

$$\begin{aligned} P(X > k) &= 0,01 \\ 1 - P(X < k) &= 0,01 \\ P(X < k) &= 0,99 \end{aligned}$$

On en déduit que $k \approx 54,423$.

Il probabilité qu'il ait plus de 55 appareils défectueux est inférieure à 0,01.

Exercice 5 (......../1 point)

Lors d'un raid en montagne, le temps moyen de parcours des 100 participants s'est établi à 240 min. X est la variable aléatoire égale au temps réalisé par un marcheur pris au hasard. On pose $Z = \dfrac{X-240}{20}$ et on admet que Z suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, le temps étant exprimé en minutes.

Quelle est la probabilité qu'un participant choisi au hasard ait mis plus de 200 min pour effectuer le parcours ? (Justifier votre résultat)

Solution :

1ère méthode : Comme $Z = \dfrac{X-240}{20}$, on en déduit que $X = 20Z + 240$

$$\begin{aligned} P(X > 200) &= P(20Z + 240 > 200) \\ &= P(20Z > 200 - 240) \\ &= P(20Z > -40) \\ &= P(Z > -2) \\ &\approx 0,977 \end{aligned}$$

2ème méthode : Comme $Z = \dfrac{X-240}{20} = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, on en déduit que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma = 20$.

P(X>200)$\approx 0,977$

$\sim$