Nom(s) / Prénom(s) :

....

Mathématiques

~

Devoir 1

Note .…./20

Exercice 1 (......../6 points)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesure que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en **gramme**s, augmente de 20 % en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant : Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, a heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

1. Justifier que l'évolution de la population de bactéries dans la cuve, en g, par une suite (u_n) est définie par l'expression de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 1,2u_n - 100$$

avec $u_0 = 1000$. u_n correspondant à la masse de bactéries obtenue en gramme et n le nombre de jour écoulés.

2. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice déterminer la réponse au problème posé.
3. a) Montrer que la suite constante (v_n) vérifiant la relation de récurrence (u_n) est égale pour $n \in \mathbb{N}$ à $v_n = 500$.
   b) On définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (w_n) telle que : $w_n = u_n - v_n$. Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique.
   c) Exprimer w_n en fonction de n.
   d) Montrer que $u_n = 500 \times 1,2^n + 500$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

1. Entre le jour n et le jour $n+1$, la masse de bactéries u_n augmente de 20%. Par conséquent $u_{n+1} = 1,2u_n$. Cependant, chaque jour, il y a une perte de 100g de bactéries. Ainsi $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.

2. $u_{22} \approx 28013$; $u_{23} \approx 33623$. Il faudra 23 jours pour que la masse de bactéries dépasse les 30kg.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = k$, avec $k \in \mathbb{R}$. (v_n) vérifie la même relation de récurrence que (u_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1,2v_n - 100 \\ k &= 1,2k - 100 \\ k - 1,2k &= -100 \\ -0,2k &= -100 \\ 0,2k &= 100 \\ k &= \frac{100}{0,2} \\ k &= 500 \end{aligned}$$

$v_n = 500$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Comme $v_{n+1} = 1,2v_n - 100$, on en déduit que $-100 = v_{n+1} - 1,2v_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1,2u_n - 100 \\ u_{n+1} &= 1,2u_n + v_{n+1} - 1,2v_n \\ u_{n+1} - v_{n+1} &= 1,2u_n - 1,2v_n \\ u_{n+1} - v_{n+1} &= 1,2(u_n - v_n) \\ w_{n+1} &= 1,2w_n \end{aligned}$$

Par identification, on observer que (w_n) est de la forme $w_{n+1} = qw_n$. C'est la forme d'une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 1000 - 500 = 500$.

c) Comme (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ et de premier terme $w_0 = 500$, on en déduit sa forme explicite :

$$w_n = w_0 \times q^n = 500 \times 1,2^n$$

d) Comme $w_n = u_n - v_n$, on en déduit que $u_n = w_n + v_n = 500 \times 1,2^2 + 500$

e) • $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 1,2^n = +\infty$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} 500 = 500$.

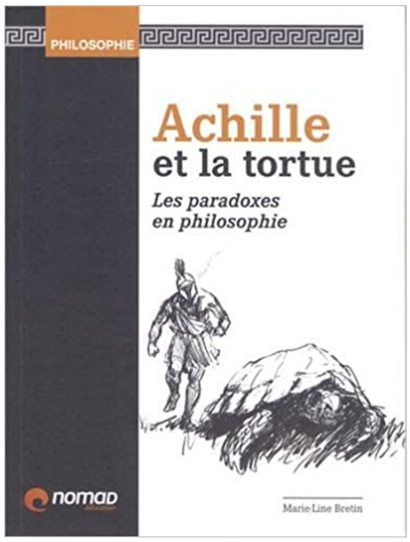
La limite d'une somme est la somme des limites :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 1,2^n + 500 = \lim\limits_{n \to +\infty} 500 \times 1,2^n + \lim\limits_{n \to +\infty} 500 = +\infty$

Exercice 2 (......../4 points)

A priori la somme d'un nombre infini de longueurs est une longueur infinie. Au Vème siècle avant J.C., le grec Zénon d'Elée (-490 ; -425) nous exprime qu'il peut en être autrement :

Achille, célèbre pour sa rapidité, court à vitesse constante sur une longueur de 1 km. Précisons que le kilomètre n'existait pas encore à cette époque. À l'étape 0, Achille parcourt la moitié de la longueur de la course. À l'étape 1, il parcourt la moitié de la longueur restante et ainsi de suite en poursuivant le processus de division.



L'objectif de cette activité est de démontrer que plus on ajoute d'étapes, plus on se rapproche de l'arrivée sans la dépasser.

1. Quelle est la distance parcourue durant l'étape 1 de la course ? Durant l'étape 2 ? l'étape 3 ?
2. On note u_n la distance parcourue durant la n-ième étape de la course. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q et le premier terme u_0.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. a) Démontrer que pour tout n, on a : $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 - 0,5^{n+1}$
   b) Calculer la limite de cette somme et donner une interprétation du résultat.

5. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimum d'étapes pour approcher l'arrivée à moins de 1 m.

Solution :

1. - A l'étape 1 de la course Achille a parcouru $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de la distance. C'est-à-dire 750m.
   - A l'étape 2 de la course Achille a parcouru $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ de la distance. C'est-à-dire 875m.
   - A l'étape 3 de la course Achille a parcouru $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$ de la distance. C'est-à-dire 937.5m.
2. A l'étape 0, Achille parcoure la moitié de la distance. On pose donc $u_0 = 0,5$. A l'étape suivante, Achille parcoure la moitié de la distance restante $u_1 = \frac{u_0}{2}$. C'est-à-dire la moitié de la distance qu'il à déjà parcouru à l'étape 0. On répète cette procédure pour chaque étape, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = \frac{1}{2}u_n = 0,5u_n$$

   On observe par identification que la suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = qu_n$. C'est la forme d'une suite géométrique, de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = 0,5$.
3. Comme (u_n) est géométrique de raison de $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = 0,5$, on en déduit sa forme explicite :

$$u_n = u_0 \times q^n = 0,5 \times 0,5^n$$

4. a) $S_n = u_0+u_1+\cdots+u_n = u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 0,5\times\frac{1-0,5^{n+1}}{1-0,5} = \cancel{0,5}\times\frac{1-0,5^{n+1}}{\cancel{0,5}} = 1-0,5^{n+1}$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-0,5^{n+1} = 1$.
   La limite de suite tend vers 1. Achille "converge" vers la ligne d'arrivée, mais ne l'atteindra jamais.
5. $S_9 \approx 0,99805$, $S_{10} \approx 0,99902$. Il faut 10 étapes pour qu'Achille soit à moins d'un mètre de l'arrivée.

Exercice 3 (......../7 points)

Partie A :

On considère la fonction f définie et continue sur l'intervalle $]-\infty;-100[\cup]-100;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x+1}{x+100}$$

On note $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-100\\x>-100}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-100\\x<-100}} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
2. f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $]-\infty;-100[\cup]-100;+\infty[$. Sans justification, dresser le tableau de variation de la fonction f. *(Vous pouvez vous aidez de votre calculatrice).*

Partie B :

Une entreprise produit des ballons de handball. Le bénéfice, en euro, que réalise l'entreprise sur **un** ballon lorsqu'elle produit et vend x ballons, est modélisé par la fonction g définie et continue sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x+1}{x+100}$$

1. a) En exploitant les résultats obtenues dans la partie A. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
   b) Le bénéfice sur un ballon peut-il être égal à 5€ ? (justifier)
2. On note $B(x)$ la fonction bénéfice total de l'entreprise pour x ballons vendus définie et continue sur $[0; +\infty[$.
   a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x)$.
   c) Le bénéfice total de l'entreprise peut-il être supérieur 5 000 000 € ? (justifier)

Solution :

Partie A :

1. a) Le calcul de limite de la fonction f n'est pas intuitif. On tombe sur une forme indéterminée. Factorisons l'expression de f pour connaître sa limite.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x+1}{x+100} \\ &= \frac{\cancel{x}\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\dfrac{100}{x}\right)} \\ &= \frac{3+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{100}{x}} \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{1}{x} = 3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{100}{x} = 1$

La limite d'un quotient est le quotient des limites :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{100}{x}} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3+\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{100}{x}} \\ &= \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} 3+\dfrac{1}{x} = 3$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{100}{x} = 1$

La limite d'un quotient est le quotient des limites :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{100}{x}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \dfrac{100}{x}} \\
&= \frac{3}{1} = 3
\end{aligned}$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$.

b) - $\lim\limits_{x \to -100} 3x + 1 = 3 \times (-100) + 1 = -299$
- $\lim\limits_{x \to -100} x + 100 = 0$

La limite d'un quotient est le quotient des limites :

- $\lim\limits_{\substack{x \to -100 \\ x < -100}} f(x) = \dfrac{-299}{0^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -100 \\ x > -100}} f(x) = \dfrac{-299}{0^+} = -\infty$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -100$.

2.

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f(x)$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3

Partie B :

1. a)

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0,01	$\nearrow$	3

Le bénéfice sur un ballon ne peut pas être égal à 5€. En effet, la fonction bénéfice g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et est majoré par 3. Le bénéfice maximal possible sur un ballon est un inférieur à 3€. Il ne peut donc pas être égal à 5 €.

2. a) $B(x) = xg(x) = x \times \dfrac{3x + 1}{x + 100} = \dfrac{3x^2 + x}{x + 100}$.

b) Le calcul de limite de la fonction B n'est pas intuitif. On tombe sur une forme indéterminée. Factorisons l'expression de B pour connaître sa limite.

$$\begin{aligned}B(x) &= \frac{3x^2+x}{x+100}\\ &= \frac{x^2\left(3+\dfrac{x}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{100}{x}\right)}\\ &= \frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{1+\dfrac{100}{x}}\end{aligned}$$

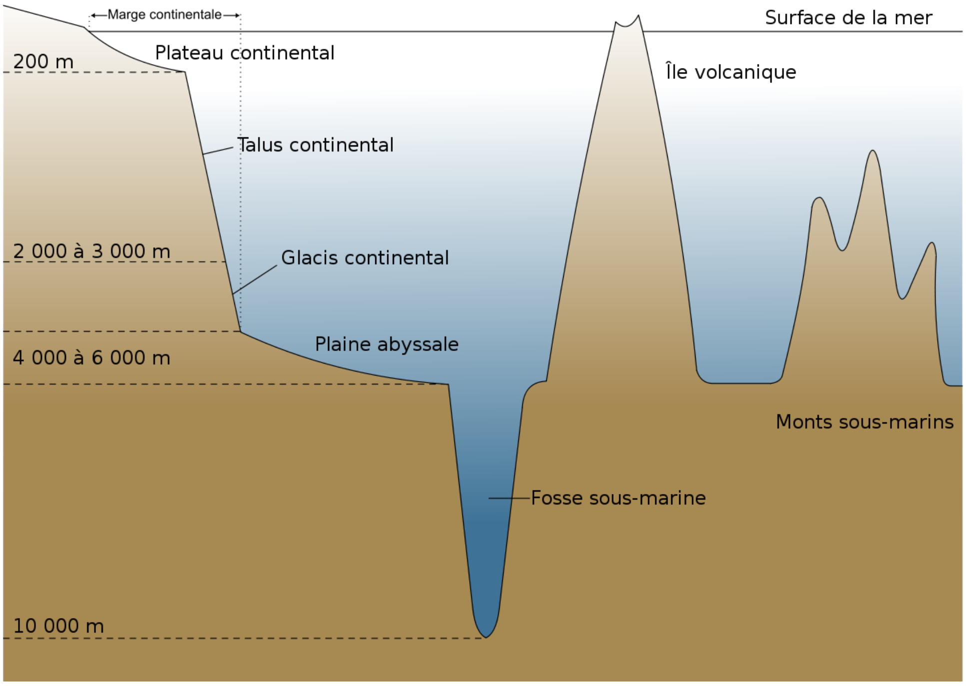
- $\lim\limits_{x\to-+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-+\infty} 3+\dfrac{1}{x} = 3$
- $\lim\limits_{x\to-+\infty} 1+\dfrac{100}{x} = 1$

La limite d'un produit est le produit des limites :
$\lim\limits_{x\to-+\infty} x\left(3+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-+\infty} x \times \lim\limits_{x\to-+\infty} 3+\dfrac{1}{x} = +\infty.$
La limite d'un quotient est le quotient des limites :
$\lim\limits_{x\to-+\infty} B(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to-+\infty} x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-+\infty} 1+\dfrac{100}{x}} = +\infty$

c) La fonction B est une fonction définie, strictement croissante et continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Ses images varient de 0 à $+\infty$.
D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, il est possible que l'entreprise réalise un bénéfice supérieur 5 000 000 €.

Exercice 4 (......../3 points)

Le profil d'une fosse sous-marine est modélisé dans un repère orthonormé par la fonction :
$f(x) = -0,07x^3 + 8x^2 - 89x - 10000$ définie et continue pour tout $x \in [0;100]$.
x et $f(x)$ sont exprimées en mètres.



L'origine du repère est le lieu où est arrêté le bateau d'exploration, à la surface de la mer.

Ci-dessous le tableau de variation de la fonction f sur $[0;100]$.

x	0	6,04	70,15	100
$f(x)$	-10000 ↘	$-10261{,}13$ ↗	$-1039{,}85$ ↘	-8900

De son emplacement, le bateau envoi un robot qui peut parcourir les fonds marins.

1. Combien de fois un robot suivant les fonds marins va t-il franchir la ligne des 10 000 m de profondeur ? (justifier votre réponse).
2. A la calculatrice déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le robot franchit la ligne des 10 000 m de profondeur. (arrondir les résultats au dixième près).

Solution :

1. - Sur l'intervalle $[0; 6,04]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Ses images varient de -10 000 à -10 261,13. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = -10000$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 6,04]$.
   - Sur l'intervalle $]6,04; 70,15]$, la fonction f est continue et strictement croissante. Ses images varient de -10 261,13 à -1 039,85. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = -10000$ admet une unique solution sur l'intervalle $]6,04; 70,15]$.
   - Sur l'intervalle $]70,15; 100]$, la fonction f est continue et strictement décroissante. Ses images varient de -1 039,85 à -8900. D'après la propriété du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = -10000$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]70,15; 100]$.

   $f(x) = -10000$ admet deux solutions sur l'intervalle $[0; 100]$.
2. $f(x) = -10000$ pour $x = 0$ et $x \approx 12,5$.

∼